ALCUNI

STRUMENTI TOPOGRAFICI A RIFLESSIONE

E LE

PROPRIETÀ CARDINALI DEI CANNOCCHIALI

ANCHE NON CENTRATI

ESPOSTE DA

FELICE CASORATI

PROF. DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE
NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA
E DI GEODESIA NEL R. ISTITUTO TECNICO SUPERIORE DI MILANO.



MILANO,
TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI.

1872.

PREFAZIONE.

Il presente opuscolo si compone di due parti tra loro indipendenti. La prima parte è destinata a divulgare la cognizione di parecchi semplici strumenti di topografia, che, sebbene assai comodi e di prezzo alquanto modesto, non sono per anco venuti in uso comune fra i nostri ingegneri.

La seconda parte è la ristampa di una memoria *sulle proprietà cardinali degli strumenti ottici*, pubblicata il 1° Giugno di quest'anno, insieme con altra del prof. Cremona, per un'occasione particolare. Il lettore troverà spiegato lo scopo della memoria nel primo capitolo della medesima. La cagione, per cui essa non ebbe tutto lo sviluppo prefissato dall'autore ed accennato in questo capitolo, devesi vedere nella immutabilità del giorno pel quale dovette comparire.

PARTE I.

ALCUNI STRUMENTI TOPOGRAFICI A RIFLESSIONE.

CAPITOLO I.

Alcune proprietà che s'accompagnano agli specchi ed ai prismi.

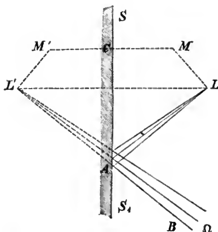
1. Si dà il nome di specchio a qualunque superficie levigata che rifletta regolarmente la luce. Offrono superficie di tal sorta i metalli solidi puliti, il mercurio puro, il vetro, l'acqua ed altri corpi. Con esperienze si è trovato, che, esprimendo con 1000 l'intensità di un cilindro lucido incidente normalmente, l'intensità del cilindro lucido riflesso risulta circa 650 per specchi metallici, 500 pel mercurio, 25 pel vetro, 23 pel marmo nero pulito, 20 per l'acqua. Però l'intensità della luce riflessa cresce col crescere dell'angolo d'incidenza, e quando quest'angolo differisce poco dal retto, allora pei metalli solidi e pel mercurio essa sale a circa 700, e per le altre sostanze sunnominate a più di 600. Gli specchi metallici ben puliti danno maggior luce che quelli di vetro coperto da amalgama di stagno. Tuttavia negli strumenti della geometria pratica i puri specchi metallici (di acciajo e simili) non vengono quasi affatto impiegati; perchè l'influenza dell'atmosfera e di altre cause, intorbidandone prestamente la nettezza, ne rende l'effetto assai inferiore a quello dei buoni specchi di vetro. Questi soffrono invero per le stesse influenze; ma, essendo la loro superficie metallica protetta dalle due parti, soffrono in grado minore, e soltanto dopo un tempo

più lungo. I migliori specchi di vetro sono quelli formati, non con amalgama di stagno, ma con argento puro, secondo un procedimento insegnato da LIEBIG.

Ci occuperemo soltanto di specchi piani, dimostrandone quelle proprietà che importano per l'uso degli specchi nei nostri strumenti: proprietà che sono prossime conseguenze delle leggi fondamentali di riflessione e rifrazione, le quali ammettiamo come note.

2. Sia SS_1 (fig. 1) una superficie riflettente piana ed L un punto luminoso. Un qualsivoglia raggio lucido LA uscente da

Fig. 1.



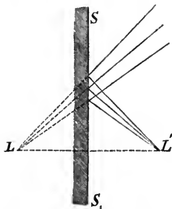
L verrà riflesso dallo specchio secondo AB in modo che, essendo SA la projezione di LA sul piano dello specchio, riescano eguali gli angoli LAS e BAS_1; e però la retta BA prolungata dietro lo specchio passerà pel punto L' simmetrico di L rispetto allo specchio. Se imaginiamo che i raggi emanati da L, dopo aver subita la riflessione sullo specchio, penetrino nell'occhio Ω di un osservatore; quest'osservatore ne avrà la stessa sensazione come se i raggi venissero dal punto L', ossia vedrà il punto luminoso in L'. Perciò L' si dice un'imagine di L. Siccome

poi in L' non s'incrociano realmente i raggi lucidi, ma soltanto i prolungamenti delle rette da essi percorse, così quest'imagine si dice virtuale, per distinguerla da una che risulti da un effettivo incrociamento di raggi, la quale si direbbe reale.

Per un altro punto luminoso M si costruirà la corrispondente imagine M' conducendo MCM' perpendicolarmente a SS_1 e prendendo $CM' = MC$. E la retta $L'M'$ sarà l'imagine della retta LM. Presentandosi un oggetto luminoso qualunque, è chiaro che lo specchio ne fornirebbe un'imagine eguale all'oggetto medesimo e posta simmetricamente rispetto alla superficie riflettente.

Ogniqualvolta il punto luminoso si trova, come testè, dinanzi allo specchio, i raggi lucidi arrivano allo specchio divergendo, e la riflessione dà origine ad un'imagine virtuale. Quando invece i raggi luminosi arrivano allo specchio convergendo ad un punto L (fig. 2) situato dietro lo specchio, la riflessione dà origine ad un'imagine reale L'. Di qui l'uso frequente degli specchi per cambiare il luogo delle imagini luminose.

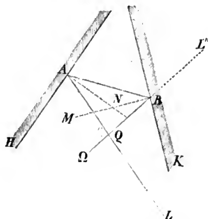
Fig. 2.



3. Consideriamo il sistema di due specchi piani HA, KB, dei quali nella fig. 3 è rappresentata l'intersezione con un piano perpendicolare ad ambedue. Se sia LA un raggio di luce contenuto nel piano della figura, cioè normale alla intersezione dei

due specchi, e AB e $B\Omega$ i cammini che esso raggio percorre per effetto della riflessione prima sull'uno e poi sull'altro specchio, la proprietà che scaturisce dalla doppia riflessione suolsi

Fig. 3.



enunciare dicendo, che, il raggio lucido doppiamente riflesso ($B\Omega$) fa col raggio incidente (LA) un angolo doppio di quello degli specchi.

Tale proprietà si riconosce subito osservando, che, l'angolo ΩQA, siccome esterno pel triangolo QAB, è eguale a

$$\Omega QA = QAB + ABQ;$$

e che l'angolo MNA delle normali ai due specchi, siccome esterno pel triangolo NAB, è eguale a

$$MNA = NAB + ABN;$$

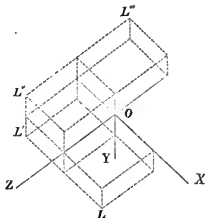
e che gli angoli di questo secondo membro sono ciascuno la metà di quelli dell'altro secondo membro.

Per quando i due specchi sono tra loro perpendicolari giova notare che allora ogni retta congiungente un punto luminoso colla rispettiva imagine dovuta alle due riflessioni è tagliata nel punto di mezzo normalmente dalla intersezione dei due specchi. Questa proprietà è subito riconosciuta, ed avvia a riconoscere quest'altra che passiamo a dimostrare per tre specchi.

4. Consideriamo un sistema di tre specchi piani. D'ordinario si considerano sistemi di specchi tutti perpendicolari ad un medesimo piano. Noi qui vogliamo considerare una terna di specchi, non perpendicolari ad un medesimo piano, bensì perpendicolari tra loro a due a due, come i piani a cui si riferiscono i punti dello spazio nel sistema delle coordinate cartesiane ortogonali. Una terna siffatta dà luogo ad una proprietà, che, per quanto sappiamo, nessuno finora ha fatto notare, e che pure è elegante e suscettibile di importanti applicazioni, in parte facili a imaginarsi. La proprietà consiste in ciò, che, l'imagine di un punto luminoso, prodotta dalla luce stata riflessa successivamente sopra ciascun specchio della terna, è simmetrica del punto luminoso rispetto al punto comune ai tre specchi, ossia questo punto è nel mezzo della retta determinata dagli altri due.

Ed invero, sieno OX, OY, OZ le intersezioni degli specchi a due a due, ed X, Y, Z le coordinate di un punto luminoso L. L'imagine L' (fig. 4) di questo punto, dovuta alla semplice ri-

Fig. 4.



flessione sullo specchio YOZ, avrà evidentemente per coordinate $-X$, Y, Z. L'imagine L'' di L', dovuta alla riflessione su ZOX, avrà per coordinate $-X$, $-Y$, Z. E finalmente l'imagine L'''

di L'', dovuta alla riflessione su XOY, avrà per coordinate $-X$, $-Y$, $-Z$.

Punti	Loro coordinate		
L	X	Y	Z
L'	$-X$	Y	Z
L''	$-X$	$-Y$	Z
L'''	$-X$	$-Y$	$-Z$

Il punto L''', avendo le coordinate contrarie di quelle di L, è dunque infatti il simmetrico di L rispetto all'intersezione O dei tre piani coordinati.

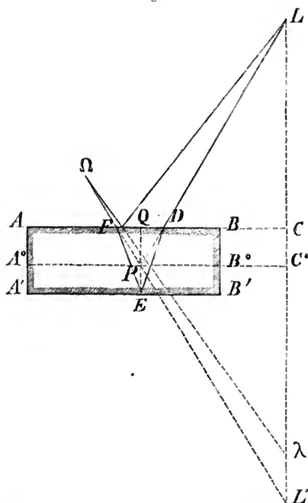
Il confronto delle coordinate di L e L'' darebbe la proprietà notata per due specchi ad angolo retto.

5. Finora abbiamo supposto che uno specchio producesse una sola imagine di un punto luminoso; ma, se sia di vetro con amalgama, lo specchio produce in realtà parecchie imagini; ed importa di riconoscere quali errori possano derivarne per l'uso che se ne fa negli strumenti della geometria pratica. Però ci limiteremo all'esame di uno specchio piano con lastra di vetro a faccie parallele.

Sieno AB, $A'B'$ (fig. 5) le intersezioni di queste faccie con un piano normale ad esse e passante per un punto luminoso L. Non tutto il movimento luminoso che da L giunge alla faccia AB penetra nel vetro, ma una parte vien riflessa da questa faccia e porta all'occhio Ω di un osservatore l'imagine λ di L, situata, come sappiamo, simmetricamente ad L rispetto ad AB. Ora, imaginiamo che sia LD il raggio luminoso, che, continuandosi in DE, EF, $F\Omega$ passa pel primo punto nodale Ω (Parte II^a, n.° 24) dell'occhio, concorrendo a produrre la sensazione dell'imagine di L dovuta alla riflessione sulla vera superficie dello specchio, cioè sulla faccia $A'B'$ amalgamata. L'osservatore vedrà questa imagine nella direzione $\Omega FL'$; ma potrà nel tempo stesso vedere l'imagine λ, che diremo secondaria, e che, essendo dovuta alla riflessione sul vetro, sarà meno chiara dell'altra prodotta dalla riflessione sul metallo. Però la diversità di chiarezza, che serve a distinguere tra loro le imagini,

diminuisce se lo specchio si va guastando; ed allora diventa possibile di prendere l'una imagine per l'altra, e però di commettere un errore angolare espresso nella figura da $\lambda\Omega L'$. Di quest'angolo cercheremo la misura.

Fig. 5.



Ma prima osserviamo che $F\Omega$ è inclinato su AB quanto DL, come se fosse provenuto da LD dopo una semplice riflessione sul piano A^0B^0 parallelo ad AB e passante per il punto P intersezione delle rette ΩF, LD; e cerchiamo la distanza PQ di A^0B^0 da AB. Dai triangoli QPD, QED abbiamo

$$QD = QP \operatorname{tang} QPD = QE \operatorname{tang} QED,$$

e quindi, indicando con a la grossezza della lastra, con i l'an-

golo d'incidenza di LD su AB, e con r l'angolo di rifrazione, abbiamo

$$QP = a\frac{\tang r}{\tang i}.$$

Detto dunque n l'indice di rifrazione, cioè il rapporto sen i : sen r, otteniamo

$$QP = \frac{a \cos i}{\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}}.$$

Di qui si vede che la distanza del piano $A^0 B^0$, su cui si può imaginare avvenuta la riflessione di LP in $P\Omega$, varia al variare di i, ossia che la superficie luogo del punto P pei diversi raggi cadenti da L su AB non è un piano esatto, se non quando questi raggi siano paralleli.

Per ottenere una formola esprimente la misura dell'angolo $\lambda\Omega L' = \theta$, o del suo seno, prenderemo dal triangolo $\lambda\Omega L'$ la proporzione

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,i} = \frac{L'\lambda}{\lambda\Omega}.$$

Ora abbiamo

$$L'\lambda = L'L - \lambda L = 2C^0L - 2CL = 2C^0C = 2PQ;$$

e però, indicando con d la distanza $\lambda\Omega$ dell'occhio dall'imagine λ, otteniamo

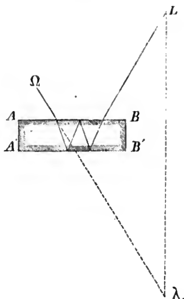
$$\text{sen}\,\theta = \frac{2a\,\text{sen}\,i \cos i}{d\sqrt{n^2 - \text{sen}^2 i}},$$

la qual formola permette di calcolare θ fissati che siano n, a, d, i. L'angolo θ impiccolisce al diminuire di a ed al crescere di d. Per oggetti L lontanissimi, per le stelle ad esempio, sen θ non differisce sensibilmente da zero; cioè dire, quando si osservano oggetti lontanissimi, lo spessore della lastra non può esercitare influenza sensibile. Se di questa influenza si deva in altri casi tener conto o no, ciò dipende dal grado di precisione che deve offrire la direzione di collimazione determinata dallo specchio.

La luce riflessa da $A'B'$ non esce tutta dal vetro, ma una parte vien rinviata da AB ad $A'B'$, e da questa superficie di nuovo riflessa. Perciò si producono parecchie altre imagini se-

condarie λ_1, ecc. (fig. 6) di L. Siccome però queste imagini riescono di più in più deboli, ed anche per oggetti L molto chiari appena può discernersi la terza imagine λ_1; così non

Fig. 6.



accade di scambiarle coll'imagine principale, e non faremo per esse veruna ricerca.

Nel caso in cui le faccie della lastra, pur essendo piane, non siano parallele, l'angolo θ non riesce nullo nè anche per oggetti infinitamente lontani. Di qui i modi per riconoscere la mancanza del parallelismo, e misurare l'angolo delle faccie; il qual'angolo entra insieme cogli altri elementi di testè a costituire la formola che dà l'angolo θ per un siffatto caso. Superiore in precisione e comodità agli altri che si conoscono è il modo praticato dal prof. Porro, che descriveremo in altro luogo.

6. Da qualche tempo si è pensato di impiegare invece degli specchi piani i prismi di vetro, i quali forniscono in confronto

dei primi non soltanto imagini più chiare, ma anche, per la loro forma, una maggiore varietà di direttrici di visuali. Molte delle applicazioni che attualmente si sanno fare dei prismi nella geometria pratica sono dovute ai prof. BAUERNFEIND e PORRO. Queste applicazioni si fondano principalmente sul fenomeno della riflessione totale, del quale vogliamo qui tenere breve parola.

Imaginando che un raggio di luce corrente in un mezzo M cada sopra la superficie dividente questo mezzo da altro M', l'angolo r di rifrazione, che questo raggio dovrebbe fare, penetrato che fosse nel mezzo M', dovrebbesi calcolare mediante la formola

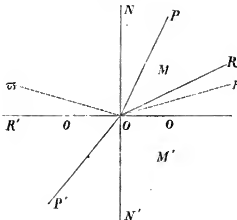
$$\operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen} i}{n},$$

in cui n significa l'indice di rifrazione pel passaggio da M ad M' ed i l'angolo d'incidenza del raggio sulla superficie.

Ora, se il mezzo M' sia più denso di M, o propriamente se sia $n > 1$, il secondo membro di questa equazione è minore di $\operatorname{sen} i$, e per qualunque i si trova un valore di r che la soddisfa, ed il massimo angolo r non è il retto, bensì quello che ha per seno $1:n$.

Ma imaginiamo che sia $n < 1$. In tal caso, significando OOO (fig. 7) la superficie dividente e POP' un raggio di luce, il seno

Fig. 7.



dell'angolo $r = P'ON'$ è maggiore del seno di $i = PON$, r raggiunge il massimo valor possibile, cioè 1, mentre sen i è ancora minore di 1 e precisamente eguale ad n. Sia RON l'angolo il cui seno è n. Al di là di quest'angolo d'incidenza, il calcolo di un angolo di rifrazione mediante la formola su ricordata non è più possibile. Che cosa avviene di un raggio lucido pO che cada sulla superficie dividente facendo un angolo d'incidenza maggiore dell'angolo limite RON? Siffatto raggio vien riflesso nell'interno del mezzo in cui già si trova, secondo le leggi della riflessione ordinaria, cioè secondo $O\varpi$ in modo che l'angolo ϖON sia nello stesso piano ed eguale all'angolo NOp. Si vede adunque che in tal caso un mezzo trasparente M' può fare completamente l'officio di specchio; e, poichè dei raggi incidenti in questo caso nessuno può essere rifratto, la riflessione dicesi totale, ed è la più perfetta che praticamente si possa ottenere, e di grandissimo uso nell'ottica pratica.

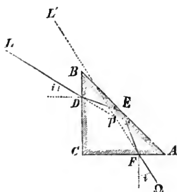
Supponendo che M' sia il vuoto, l'angolo limite NOR si trova essere

per M	= acqua	48°, 27′
„	= vetro d'indice 1, 5	41 , 48
„	= vetro d'indice 1, 8	33 , 45
„	= diamante	24 , 24

7. Prendiamo primamente in considerazione un prisma avente per base un triangolo rettangolo ed isoscele. Imaginiamo che un punto lontano L sia così situato rispetto al prisma, o piuttosto che il prisma venga così inclinato verso L, che il piano condotto da L normalmente alla direzione degli spigoli del prisma venga a tagliare il prisma; e sia ABC (fig. 8, 9, 10) la sezione che ne risulta, eguale alla base. Ritenendo la distanza di L grandissima in confronto delle dimensioni del prisma, riguarderemo tutti i raggi di luce venienti da L alla faccia CB (intendasi la faccia di cui CB è sezione) come paralleli tra loro. Vogliamo considerare due casi: il caso della fig. 8 (o della fig. 9), in cui la luce venente da L entra nel prisma pel cateto CB, vien riflessa dall'ipotenusa BA, ed esce pel cateto AC; ed il caso della fig. 10, in cui la luce entra pel cateto CB, vien riflessa prima dal cateto AC, poi dall'ipotenusa, ed esce pel cateto AC.

Primo caso. Consideriamo un raggio LD corrente nel piano della fig. 8, ed esso diventi DE per la rifrazione nell'ingresso, EF per la riflessione sull'ipotenusa, ed $F\Omega$ per la rifrazione nell'uscita. Per le leggi di riflessione essendo EF ed ED egual-

Fig. 8



mente inclinate sull'ipotenusa, e su questa essendo pure egualmente inclinati i due cateti, è chiaro che $F\Omega$ farà con AC o colla normale ad AC lo stesso angolo che DL con BC o colla normale a BC. Indicando con i l'angolo di DL con questa normale, sarà dunque pure i l'angolo di $F\Omega$ coll'altra normale, e quindi sarà

$$90° + 2i$$

l'angolo di $F\Omega$ con DL.

Evidentemente la direzione di $F\Omega$ è pur quella che scaturirebbe dalla LD per effetto di una riflessione sopra uno specchio semplice passante per P parallelamente all'ipotenusa del prisma.

Poichè l'angolo di $F\Omega$ con LD, ossia l'angolo che il cilindro lucido emergente fa col cilindro lucido incidente, varia al variare di i, avverrà che, girando il prisma intorno al suo asse (*), l'i-

(*) Per **asse del prisma** vogliasi quì intendere una retta che traversi il prisma parallelamente agli spigoli.

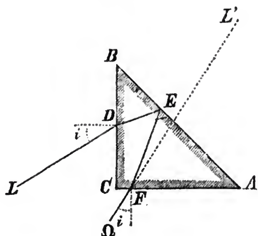
magine L' del punto fisso L, portata all'occhio Ω di un osservatore dal cilindro lucido emergente, girerà nel senso stesso del prisma, e farà quindi parere mobile all'osservatore il punto L.

Se l'angolo d'incidenza non sia verso l'angolo acuto, ma verso l'angolo retto, come nella fig. 9, l'angolo di $F\Omega$ con DL sarà

$$90^\circ - 2i.$$

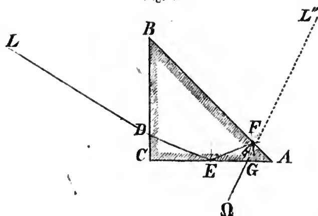
Girando il prisma, l'imagine L' girerà, come dianzi, nel senso stesso del prisma.

Fig. 9.



8. **Secondo caso.** Il raggio LD diventi DE (fig. 10) per la rifrazione nell'entrata, EF per la riflessione sul cateto, FG

Fig. 10.



per la riflessione sull'ipotenusa, infine $G\Omega$ per la rifrazione nell'uscita.

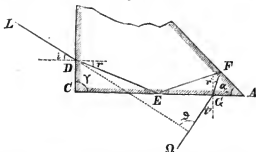
Osservando che il raggio FG proviene dal DE per effetto di due riflessioni, l'una sullo specchio CA, l'altra sullo specchio AB che forma con CA un angolo semiretto, si conchiude che FG formerà con DE un angolo (doppio di un semiretto) retto. E però FG ed ED, tra loro perpendicolari, faranno rispettivamente colle AC e CB, pure tra loro perpendicolari, angoli eguali; e quindi faranno ancora angoli eguali con queste faccie, o con le normali alle medesime, le rette $G\Omega$ e DL, che possono imaginarsi come raggi derivanti da FG ed ED per rifrazione nelle dette faccie. Ciò è come dire che $G\Omega$ riesce perpendicolare a DL (*).

(*) Il caso di due raggi (FG, ED), normali tra loro perchè derivanti l'uno dall'altro per riflessione su due faccie ad angolo semiretto, i quali si rifrangono nel traversare due faccie pure normali tra loro, conservandosi quindi ancora tra loro perpendicolari; siffatto caso, assai importante, si presenterà ripetutamente nel seguito in apparenze più o meno variate; e però allora non faremo che rinviare al qui esposto in riguardo della fig. 10.

Chi voglia riconoscere la necessità dei due angoli retto e semiretto tra le faccie del prisma, affinchè questo faccia da squadro, cioè dia un cilindro lucido emergente perpendicolare all'incidente, può osservare la seguente ricerca delle condizioni che devono essere soddisfatte affinchè il raggio emergente faccia coll'incidente un angolo costante cioè indipendente dall'angolo d'incidenza.

Sieno: i, r, r', i' gli angoli che il raggio di luce fa successivamente colle normali alle faccie BC e CA (fig. 11) entrando ed uscendo dal

Fig. 11.



prisma; γ, α gli angoli per ora indeterminati delle faccie BC e CA, CA ed AB; ϑ l'angolo del raggio emergente coll'incidente. Le equazioni,

In tal caso, girando il prisma intorno al suo asse, e restando fisso il punto L e però invariata la direzione LD, resterà pure invariata la direzione $G\Omega$; e quindi un osservatore, che con l'occhio Ω guardi nel prisma, vedrà l'imagine L'' di L immobile in una direzione perpendicolare alla DL, cioè dire in una direzione perpendicolare a quella determinata dal punto L e dal luogo del prisma e dell'occhio.

---

colle quali determinare r, r', i', ϑ dati che siano γ, α, i, sono le seguenti:

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r, \qquad \operatorname{sen} i' = n \operatorname{sen} r',$$
$$r' = r + 2\alpha - \gamma, \qquad i' = i + \vartheta - \gamma.$$

Ponendo per brevità

$$2\alpha - \gamma = h, \quad \vartheta - \gamma = k,$$

le due ultime equazioni danno

$$\operatorname{sen} r' = \operatorname{sen} r \cos h + \cos r \operatorname{sen} h, \quad \operatorname{sen} i' = \operatorname{sen} i \cos k + \cos i \operatorname{sen} k.$$

Sottraendo la seconda di queste dalla prima moltiplicata per n, avuto riguardo alle prime due fra le quattro equazioni su esposte, si ottiene

$$0 = (\cos h - \cos k) \operatorname{sen} i + \operatorname{sen} h \sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i} - \operatorname{sen} k \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i}.$$

Poichè h e k sono formati con gli angoli costanti α e γ e con ϑ, e poichè ϑ ha da essere pure costante (rispetto ad i), dovranno essere costanti anche h e k; e però il primo termine del secondo membro di questa equazione cambierebbe di segno con i, restando invariati gli altri termini. Dunque dovranno essere separatamente

$$\cos h - \cos k = 0, \quad \operatorname{sen} h \sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i} - \operatorname{sen} k \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i} = 0.$$

Poichè la prima di queste equazioni dà $\operatorname{sen} h = \pm \operatorname{sen} k$, la seconda può scriversi come segue

$$\operatorname{sen} h \left[\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i}\right] = 0,$$

e mostra che dev'essere $\operatorname{sen} h = 0$, non potendo essere zero l'altro fattore. Per soddisfare le equazioni $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} k = 0$ prendendo $h = k = 0$, otteniamo, siccome condizioni per la costanza di ϑ, le seguenti equazioni

$$\vartheta = \gamma = 2\alpha.$$

In particolare possiamo dunque conchiudere, che, volendosi $\vartheta = 90°$, bisogna far retto l'angolo C e semiretto A; e che, volendosi $\vartheta = 45°$, bisogna prendere un'angolo γ di 45° ed uno α di 22° 30'.

Indicheremo, siccome in rapporto con questa nota, il n. 4 delle pagine 35 e 36 degli *Elemente der Vermessungskunde* del prof Bauernfeind. Le nostre citazioni si riferiranno sempre alla terza edizione di quest'opera, uscita a Stuttgart nel 1869.

Il prof. BAUERNFEIND faceva notare questa proprietà nel 1851 nella Memoria sul *Prismenkreuz*, di cui diremo più innanzi.

Per una medesima inclinazione della faccia CB del prisma sulla direzione DL si potrà vedere tanto l'imagine girevole (L') quanto la fissa (L''). Ma la prima si troverà sùbito guardando nel cateto CA; mentre la seconda bisognerà cercarla con qualche attenzione verso l'una estremità del cateto (*), non potendo i raggi doppiamente riflessi uscire pel mezzo di AC (**). Questa imagine è inoltre assai meno chiara della prima, perchè prodotta non da una sola, ma da due riflessioni, la seconda delle quali può non essere totale e dar quindi luogo a molta perdita di luce, se l'ipotenusa al di fuori non sia coperta. E sono appunto la minore chiarezza e la immobilità al girare del prisma i caratteri pei quali l'imagine dovuta alla doppia riflessione si distingue con sicurezza dall'altra.

È manifesto che la normalità costante del cilindro lucido emergente rispetto all'incidente si può conseguire anche con prismi a basi diverse dalla qui considerata, bastando che vi siano faccie comprendenti tra loro gli angoli necessari. È pure manifesto che mediante le due faccie tra loro perpendicolari si potrà ottenere un cilindro lucido emergente che faccia angolo doppio di un retto, cioè che sia parallelo all'incidente. E però, per queste proprietà e per quella notata nella fig. 8, della eguale inclinazione sull'ipotenusa dei cilindri lucidi incidente ed emergente, è facile concepire come i prismi si possano assumere all'officio, non che di squadro, anche di allineatore e di diottra. E noi porremo qui fine al capitolo delle proprietà astratte degli specchi e dei prismi, per passare appunto ad una rivista delle applicazioni che se ne sono fatte alla risoluzione dei problemi pratici che sono di spettanza dei nominati strumenti.

(*) Verso l'angolo acuto nel caso della fig. 10; e verso l'angolo retto nel caso in cui l'angolo LDB fosse ottuso. Questo caso può vedersi esso pure espresso nella fig. 10, imaginando che ΩG sia il raggio incidente, e DL l'emergente da riceversi nell'occhio.

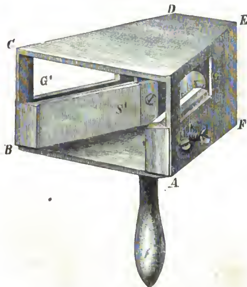
(**) Siccome è $CD + AG = AC \cdot \tang r$; così, a rigore, ogni AG sarà davvero minore della metà di AC finchè $\tang r$ sarà minore di $1:2$, ossia finchè i, nella supposizione di $n = 3:2$, sarà minore di $42°8'$.

CAPITOLO II.

Squadro a specchi; squadri, allineatori, diottra, livello a prisma.

9. Lo squadro a specchi, detto talvolta squadro inglese, fu inventato nella seconda metà del secolo passato dall'ottico ADAMS in Londra, ed è rappresentato in grandezza naturale nella fig. 12. Nel prisma vuoto $ABCDEF$ di ottone (le cui basi BF, CE si vedranno talvolta anche non trapezie,

Fig. 12.



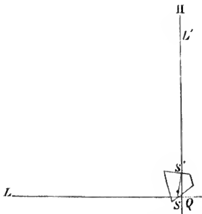
ma foggiate a porzione di corona circolare), aperto nella faccia AC ed avente due finestre G e G' nelle faccie AE e BD, si trovano due specchi piani S e S' normali alla base BF e

formanti tra loro angolo semiretto. A questa base si unisce un manubrio per tenere lo strumento durante l'operazione. Lo specchio S' è fissato invariabilmente, mentre l'altro S può esser fatto girare mediante le viti H e K di quanto occorra perchè faccia appunto l'angolo semiretto collo specchio S.

Lo strumento serve a tracciare angoli retti sul terreno, ossia fa l'officio del comune squadro agrimensorio; ma non esige come questo un sostegno fisso, qual'è un bastone ficcato verticalmente nel terreno; somministrando una direzione perpendicolare mediante una sola visata, per la quale basta un semplice istante di quiete.

Per determinare con questo squadro l'allineamento perpendicolare in Q (fig. 13) ad un allineamento dato LQ, un'operatore si porta in Q, e tenendo lo strumento sopra Q in modo

Fig. 13.

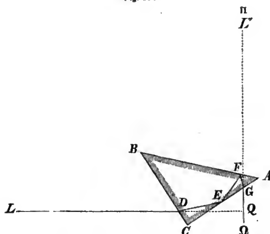


che gli specchi riescano verticali e che S possa ricevere e riflettere verso S' la luce venente da L, coll'occhio situato dinanzi la finestra G guarda per questa finestra l'imagine L'' di L nello specchio S', e contemporaneamente guarda per le due finestre una palina II che un secondo operatore all'opportuna distanza da Q tiene pendente tra le dita, e fa spostare a dritta o a sinistra questa palina finchè compaja nel prolungamento dell'imagine di L, cioè sembri in una medesima verticale con quest'ima-

gine; ottenuta la qual coincidenza, l'angolo $\Pi Q L$ sarà doppio di quello degli specchi, e però retto.

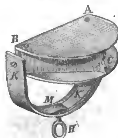
10. Da ciò che si è esposto nel n.° 8 ognuno comprende come un prisma, la cui base sia un triangolo rettangolo ed isoscele (ed appunto, se si vuole, delle dimensioni delle figure 10 o 14,

Fig. 14.



e 15), possa fare l'officio dello squadro agrimensorio. A tal fine lo si vede nella fig. 15 munito di un rivestimento metallico, il

Fig. 15.



quale ne copre le basi e l'ipotenusa, e presenta un anello *H*

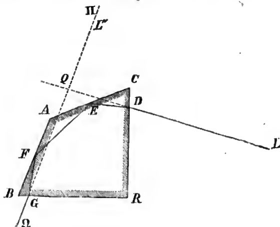
che si può tenere comodamente fra le dita quando devasi adoperare lo strumento. Per determinare l'allineamento perpendicolare in Q all'allineamento dato QL, un operatore si porti in Q, e quivi, tenendo il prisma in mano sopra di Q cogli spigoli verticali, lo volga in guisa che la faccia BC riceva la luce venente dalla palina L. Questa luce percorrerà il cammino $LDEFG\Omega$; e però, guardando coll'occhio Ω ad un tempo e nella faccia CA del prisma per vedere l'imagine L'', e al disopra del prisma per vedere la palina Π portata dal secondo operatore, e facendo fissare questa palina in modo che una sua parte sembri coperta da L''; sarà $Q\Pi$ l'allineamento desiderato.

La montatura rappresentata nella fig. 15 fu fatta da Ertel. L'archetto KK è girevole intorno ad un'asse parallelo all'ipotenusa; così che, finita l'operazione, si gira l'archetto sino a chiudere completamente il prisma come in una scatoletta. La molla M entrando nell'infossatura C tiene chiuso l'archetto.

Il prof. Bauernfeind indica anche (a pag. 153 dell'op. cit.) l'officio diastimometrico a cui si può destinare il prisma triangolare, facendone l'angolo in C un po' minore di un retto.

11. L'officio di squadro può egualmente essere fatto da un prisma come quello della camera lucida di Wollaston (fig. 16),

Fig. 16.



di cui la sezione è una delle quattro parti eguali in cui si può dividere un ottagono regolare con due tagli diagonali. Poichè il supplemento dell'angolo A dell'ottagono è semiretto, il cilindretto lucido FG, proveniente dal DE per le due riflessioni sugli specchi CA ed AB, forma col DE un angolo retto. E il cilindretto emergente $G\Omega$ riesce quindi perpendicolare all'incidente LD, essendo (n.° 8) le faccie rifrangenti RC e RB ad angolo retto tra loro.

La montatura, destinata a coprire le faccie AB e AC ed a porgere una comoda impugnatura, può essere affatto simile a quella della fig. 15 od a quella della fig. 19. Per tracciare l'allineamento perpendicolare in Q all'allineamento dato QL basta tenere il prisma sopra Q con la faccia RC (od RB se L fosse a sinistra) volta alla palina L, e, guardando ad un tempo coll'occhio Ω entro e per disopra al prisma, far fissare una palina Π in modo che copra l'imagine L''. La palina Π determinerà con Q l'allineamento desiderato.

L'essenziale in questo prisma come squadro manifestamente sta in ciò, che sia triplo d'un semiretto l'angolo A e retto l'angolo R. Gli angoli B e C potrebbero quindi essere anche disuguali, sebbene non tanto che l'un d'essi riuscisse eguale o maggiore di un retto.

Il prof. Bauernfeind fece poi notare (nel 1868; opera cit., pag. 37-39) che questo prisma può anche servire per determinare angoli semiretti; al quale scopo conviene che le faccie RB e RC siano inargentate per circa tre quarti della loro lunghezza a partire da R, affinchè meglio riflettano la luce verso l'interno del prisma.

Se inoltre si pulisce questo strato argenteo di maniera che faccia da specchio anche verso l'esterno, si ottiene questo altro vantaggio, che le imagini L' ed l' (fig. 17) di due punti L ed l, formate rispettivamente dagli specchi RB e RC, si avvicinano tanto più ad un medesimo piano RW passante per l'intersezione dei due specchi quanto più questa intersezione si accosta alla retta Ll. Ciò risulta sùbito dall'ispezione della fig. 17, nella quale $RBAC$ rappresenta tuttora una sezione fatta al prisma normalmente agli spigoli, ed L, L', l, l' rappresentano le projezioni ortogonali dei già nominati punti L, L', l, l' sul piano di essa sezione. Se dunque, tenendo il prisma cogli spigoli ver-

ticali, e guardando negli specchi RB ed RC, un osservatore Ω si riduca in un punto tale che le imagini L' ed l' gli compajano in allineamento con R, ossia col proprio occhio, in quel punto

Fig. 17.

l'intersezione degli specchi incontrerà la retta Ll, vale a dire la verticale di R determinerà sul suolo un punto dell'allineamento Ll. Il prisma di Wollaston, inargentato come fu detto, serve dunque per fare non solo angoli retti e semiretti, ma anche doppi di un retto, cioè serve anche per determinare quanti punti si vogliano nell'allineamento di due punti dati. Con questo, non che cogli altri allineatori a riflessione che descriveremo, un operatore fissa da solo immediatamente un punto nell'allineamento di due dati e frammezzo ad essi.

12. Nel 1868 il prof. Bauernfeind riconobbe che un prisma a base pentagona può servire a tracciare angoli semiretti, retti e doppi d'un retto, ed anche a risolvere comodamente il problema di trovare il piede della perpendicolare condotta da un punto dato sopra un allineamento dato.

La fig. 18 rappresenta la sezione di questo prisma in grandezza naturale; gli angoli sono rispettivamente della seguente ampiezza:

angolo $R = 90^\circ$
„ $B = 90^\circ$
„ $A = \frac{3}{2} \cdot 90^\circ = 135^\circ$
„ $C = \frac{7}{4} \cdot 90^\circ = 157^\circ 30'$
„ $S = \frac{3}{4} \cdot 90^\circ = 67^\circ 30'$

Prolungando il lato AC sino ad incontrare i prolungamenti

Fig. 18.

dei lati RB ed RS si formerebbe un triangolo rettangolo ed isoscele.

Per essere semiretto il supplemento dell'angolo delle faccie riflettenti CA ed AB, e retto l'angolo delle faccie rifrangenti

RS ed RB, il cilindro lucido emergente $G\Omega$ sarà (n.° 8) normale all'incidente LD. E similmente, per essere semiretto l'angolo delle faccie riflettenti RS ed AC, e retto quello delle faccie rifrangenti BA e BR, il cilindro lucido emergente $g\omega$ sarà normale all'incidente ld. E però, se LD e ld saranno tra loro paralleli, cioè se il prisma si troverà nell'allineamento Ll (*), i cilindri lucidi $G\Omega$ e $g\omega$ saranno pure tra loro paralleli, ed un osservatore che guardi nella faccia RB vedrà le imagini L'' ed l'' delle paline L ed l attigue l'una all'altra. Se l'osservatore non sia nell'allineamento Ll e vi si voglia ridurre, basterà dunque che si muova trasversalmente (cioè in direzione più o meno prossimamente normale) ad Ll finchè gli riesca di vedere attigue le dette imagini (**).

Il vantaggio principale che questo prisma presenta in confronto della camera lucida inargentata consiste in ciò, che, quando il prisma è nell'allineamento Ll, le direzioni GL'' e gl'' riescono non solo tra loro parallele, ma eziandio costantemente perpendicolari ad Ll anche girando un po' il prisma a dritta o a sinistra intorno alla verticale del suo luogo. E però, volendo il piede della perpendicolare condotta da un dato punto II sull'allineamento Ll, basterà che l'operatore col prisma cerchi il luogo in cui guardando e dentro (nella faccia RB) e per disopra al prisma gli venga fatto di vedere le imagini L'' ed l'' attigue tra loro ed alla palina II.

La fig. 19 rappresenta il prisma colla montatura indicata dal prof. Bauernfeind.

L'uso poi dello strumento semplicemente come squadro potremmo ormai tenerlo come evidente. Se la luce verrà da una

---

(*) Siccome la distanza tra le rette LD, dl non può superare la diagonale SB, così, quando esse rette siano parallele, si possono, per questi problemi di topografia, riguardare l'una quale prolungamento dell'altra, ed entrambe quali porzioni dell'allineamento Ll.

(**) Diciamo attigue e non sovrapposte, poichè la esatta sovrapposizione non si può conseguire finchè si usino cammini ($DEFG$, $defg$) nei quali l'ultima riflessione della luce venente da L si fa sopra una faccia (AB) diversa da quella (CA) su cui si fa l'ultima riflessione della luce venente da l. Però, se si usi un cilindro lucido rifratto UV, il quale venga riflesso dalla faccia RB secondo Vd, il cammino suo da d in poi si confonderà col cammino $defg\omega$ del cilindro lucido ld, e quindi porterà all'occhio ω un'imagine di L sovrapposta alla l''.

palina L alla sinistra dell'osservatore, questi potrà ammetterla nel prisma per la finestra K, e guardando per la finestra H la L'' e per disopra al prisma una palina tenuta da un secondo operatore, far portare questa a coincidenza con L''. Se la palina da cui verrà la luce sarà la l, a destra dell'osservatore, questi potrà ammettere la luce nel prisma per la finestra H, e guardare per K. Ma, poichè la fig. 18 porge quattro cammini interni $DEFG$, $GFED$, $defg$, $gfed$ ai quali corrispondono cammini esterni tra loro perpendicolari, è chiaro che si potrà ricevere, per esempio, la luce inviata da l anche per la faccia BA come nella fig. 18; oppure per la stessa finestra K, se siasi svitato il manico M (fig. 19) dall'una base del prisma ed avvitato in N nell'altra base. Entrando la luce in d, il cammino

Fig. 19.



interno percorso sarebbe il $defg$, e l'osservatore dovrebbe guardare per la finestra H; entrando invece la luce per la finestra K, il cammino percorso sarebbe il $DEFG$, e l'osservatore dovrebbe guardare in H.

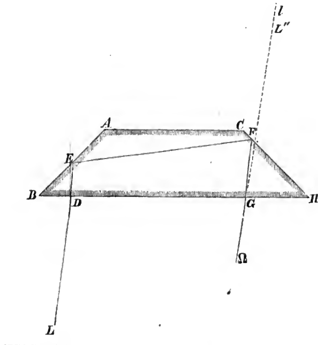
La determinazione degli angoli semiretti si fa per mezzo della proprietà che segue. Siccome l'angolo compreso tra le faccie RB ed SC (fig. 18) è la metà di un semiretto, e quello compreso tra le faccie AC ed RS è semiretto; così è subito visto che un cilindro lucido, il quale, entrando nel prisma per la faccia AC, subisca nell'interno due riflessioni, l'una sulla faccia RB e l'altra sulla SC, emergendo por la faccia RS, formerà colla dire-

zione primitiva o d'incidenza un angolo semiretto (*). Se il prisma non dovesse servire pel tracciamento anche degli angoli semiretti, si potrebbe tenere l'angolo S retto, come il B.

13. Il prof. Porro imaginò da circa trent'anni di impiegare, all'officio di allineatore e di diottra, prismi le cui basi sono trapezi risultanti da triangoli rettangoli per mezzo di tagli paralleli all'ipotenusa.

Spieghiamo in prima l'allineatore. Rappresenti LD (fig. 20)

Fig. 20 (**).



(*) È il caso di $\vartheta = \gamma = 2\alpha = 45^\circ$ nella nota alla pag. 18.

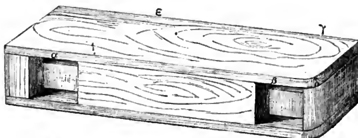
(**) Il prof. Porro usa le dimensioni seguenti: otto centimetri per la lunghezza della base, cioè pel lato BH; venti o venticinque millimetri per la larghezza della base; otto millimetri per l'altezza del prisma.

un cilindro lucido nel piano della sezione $BACH$ parallela alle basi del prisma, e DE, EF, FG, $G\Omega$ rappresentino le direzioni che esso cilindro prende entrando, riflettendosi due volte e infine uscendo dal prisma. Le direzioni FG ed ED, dovendo comprendere un angolo doppio di quello delle faccie riflettenti BA e CH, saranno parallele tra loro; e quindi saranno ancora parallele tra loro le direzioni DL e $G\Omega$. E però, se siano L ed l due paline individuanti un'allineamento, per trovare un punto in questo allineamento, compreso tra L ed l, basterà che un operatore, tenendo in mano il prisma colla faccia BH dinanzi all'occhio Ω ed in modo che la faccia stessa riceva luce da L, si muova trasversalmente all'allineamento sinchè l'imagine L'' di L copra la palina l, cui l'operatore deve osservare per di sopra o per di sotto o per di fianco del prisma.

Volendo percorrere il terreno secondo l'allineamento Ll, basterà camminare in guisa da conservare la sovrapposizione di L'' ed l.

La fig. 21 rappresenta l'allineatore colla montatura di legno usata dal prof. Porro. La luce venente da L entra per l'apertura α ed esce per l'apertura β, penetrando nell'occhio dell'osservatore. L'apertura γ permette all'occhio stesso di vedere liberamente a distanza per di sopra, per di sotto e per di fianco del prisma.

Fig. 21.

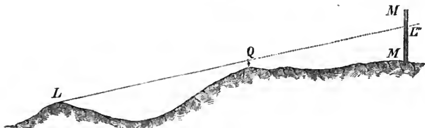


Le faccie BA e CH (fig. 20) insieme con una delle basi del prisma costituiscono una terna di piani ortogonali quale fu imaginata nel n.° 4. Si può quindi profittare della proprietà esposta in esso numero per risolvere vari problemi. Diamo un'esempio di queste applicazioni.

Vogliasi determinare il punto in cui il prolungamento della retta LQ (fig. 22) incontra il piano MM.

A tal fine basterà che un'operatore si porti collo strumento in Q ed ivi cerchi una disposizione del prisma (*) per la quale

Fig. 22.



la luce, venente da L all'apertura α, subisca entro il prisma le tre riflessioni sui tre piani ortogonali indicati, e per l'apertura β venga al suo occhio. Ciò conseguito, egli vedrà l'imagine L''' sul prolungamento di LQ (**); e però se, mentre guarda nel prisma, guarderà anche per di sopra o per di sotto o per di fianco ad esso, a traverso le aperture β e γ, in qual punto del piano MM sembri cadere la imagine L''', ivi otterrà l'intersezione del piano col prolungamento della LQ.

Questo basta per far comprendere i servigi che simili strumenti possono rendere anche particolarmente in operazioni militari spedite.

14. Prendendo un prisma che abbia per base non precisamente il trapezio della fig. 20, ma il pentagono della fig. 23, che risulterebbe dal trapezio tagliandone via un triangoletto rettangolo, si ha lo squadro del prof. Porro. Dalla figura si riconosce, senz'altro, che il cilindro lucido LD, penetrando nel prisma o subendovi due riflessioni, ne esce nella direzione $G\Omega$ normale a LD. Guardando coll'occhio Ω entro e per di sopra o per di sotto o per di fianco al prisma, e facendo fissare la

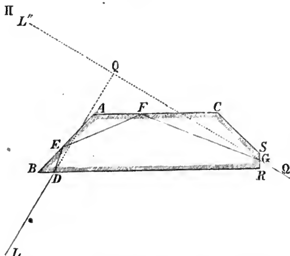
(*) Con brevissima pratica chiunque si abilita eziandio a questo e ad altri analoghi impieghi dei prismi.

(**) In termini esatti il punto Q dovrebbe essere il punto comune ai tre piani ortogonali, cioè essere il punto O della fig. 4.

palina Π nella direzione dell' imagine L'', sarà $Q\Pi$ l'allineamento perpendicolare a LQ.

Il prof. Porro trova opportuno di tenere due prismi, uno come allineatore, ed un altro più piccolo come semplice squadro. Chi desideri di avere un solo prisma per entrambi questi offici, basta che se lo provveda della forma della fig. 23 (dove la faccia RS converrebbe che fosse di circa un solo millimetro di lar-

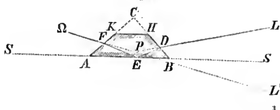
Fig. 23.



ghezza) e con una montatura simile bensì a quella della fig. 21, ma avente anche le aperture occorrenti per lo squadro, cioè una apertura oculare in δ ed una obbiettiva in ε.

15. Rappresenti SS (fig. 24), per fissare le idee, lo spigolo

Fig. 24



fiduciale (od una parallela ad esso che sia press'a poco in uno stesso piano verticale) di un regolo che vogliamo imaginare adagiato sopra un piano orizzontale, per es. sullo specchio orizzontato di una tavoletta pretoriana. Ed imagininmo il prisma a base trapezia fissato sul regolo in modo che essa base sia pure orizzontale e con i suoi lati paralleli nella direzione SS. Un cilindro lucido LD, che da L giunga al prisma normalmente agli spigoli, e però nel piano della sezione $ABHK$ parallela alla base, si comporta come il cilindro LD del n.° 7, cioè esce nella direzione $F\Omega$ che fa con LD un angolo LPL' doppio di quello di DL con AB ossia con SS.

E però, se voglia dirigere lo spigolo fiduciale SS nll'oggetto L, l'osservatore coll'occhio in Ω guardi ad un tempo l'imagine L' di L nel prisma e l'oggetto L liberamente per di sopra o di fianco al prisma, e giri il regolo finche veda oggetto ed imagine sovrapporsi.

La diottra a prisma (del quale le dimensioni possono essere, ben inteso, all'incirca quelle della figura) permette di collimare con maggior precisione della diottra a palette per più ragioni: perchè un errore di collimazione, ossia l'angolo di DL con SS, è visto raddoppiato dall'osservatore, vedendo egli l'angolo LPL'; perchè non v'è bisogno di osservare il filo obbiettivo, che è un oggetto vicino, insieme col punto di mira, che è un oggetto L lontano, mentre l'occhio non può veder bene (Parte II. n.° 24) nello stesso momento a distanze così diverse; infine perchè la quantità di luce che giunge all'occhio è maggiore di quella che vi può giungere per i piccoli fori o per le strette fessure delle diottre ordinarie, alle quali talvolta s'accompagnano anche gli sfavorevoli effetti della diffrazione.

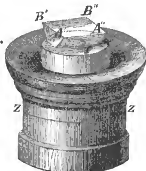
16. Imaginiamo lo stesso prisma trapezio congiunto stabilmente con una livella sferica T in modo che la faccia $A'B'B''A''$ (fig. 25) del prisma riesca orizzontale quando la bolla sia centrata.

Un cilindro lucido LD che venga al prisma normalmente agli spigoli si comporta come s'è visto nei n.i 7 e 15. E però, se nella fig. 24 si pensi adesso rappresentata la sezione fatta nl prisma della fig. 25 (a bolla centrata) col piano verticale contenente LD, è chiaro che, affinchè il punto L sia nel prolungamento della retta AB esistente nella faccia $A'B'B''A''$, bisogna ch'esso punto, guardato liberamente, e la sua imagine L',

da guardarsi simultaneamente nel prisma, si sovrappongano. Qui pure vi è il vantaggio che l'angolo dell'errore si vede raddoppiato.

Questo livello (cioè la livella unita col prisma) può chiudersi in una scatoletta tascabile ZZ (fig. 25). Il prof. PORRO ne encomia l'uso con sostegno. Tolto il livello dalla scatola, s'infilza

Fig. 25.



questa nell'estremità di un bastone (fig. 26) (*) per un foro che la traversa, e si colloca il livello sul coperchio della scatola. La superficie esterna superiore di questo coperchio è sferico-concava; e però, spostando opportunamente colle dita il livello, si può centrare la bolla.

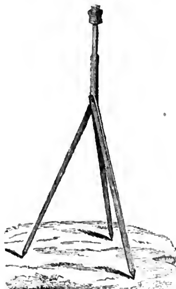
Per battere un punto, supposto che in esso sia collocata una mira a scopo mobile, per esempio, semicircolare (fig. 27) di cui il punto più alto (o più basso) L sia quello di mira, l'osservatore posto al livello indicherà di muovere lo scopo (**) finchè questo e la sua imagine gli compajano come sta espresso nella fig. 28, dove appunto L e la sua imagine sono rappresentati l'uno attiguo (o sovrapposto) all'altro.

(*) Il treppiede rappresentato nella fig. 26 può chiudersi ed usarsi come bastone.

(**) Potrà accadere tanto di far muovere lo scopo verso il basso, quanto verso l'alto. Nel caso espresso nella fig. 24 (di cui la retta AB va pensata, come dicemmo, nel piano orizzontale $A'B'B''A''$ della fig. 25) lo scopo visto liberamente sarebbe al disotto della sua imagine vista nel prisma, e quindi lo scopo dovrebbesi far muovere verso l'alto.

17. La proprietà, che serve di fondamento agli usi del pri-

Fig. 26.



sma dichiarati nei due numeri precedenti, è che il cilindro

Fig. 27.



Fig. 28.

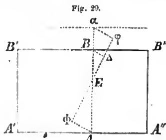


lucido incidente e l'emergente fanno angoli eguali colla faccia,

che dirò R, su cui avviene la riflessione. Ora, per apprezzare giustamente l'opportunità del prisma pei detti usi, è essenziale di riflettere che l'eguaglianza degli angoli con R ha luogo anche quando il cilindro incidente, e quindi l'emergente, non sia normale agli spigoli del prisma.

Per riconoscere questa verità teniamo ancora designati con D, E, F i punti dove un cilindro lucido venente da L, adesso però in direzione obbliqua agli spigoli, entra nel prisma, si riflette su R ed esce, penetrando finalmente nell'occhio Ω. La spezzata $LDEF\Omega$ può dirsi composta di due parti che da E procedono l'una verso L e l'altra verso Ω con eguali inclinazioni e rispetto al piano, o faccia, R e rispetto ad un piano W perpendicolare agli spigoli e che vogliamo imaginare passante per E. Ed invero, rappresenti $\Delta E \Phi$ (fig. 29) la projezione di DEF sulla faccia $A'B'B''A''$ ed AB la traccia del piano W.

Fig. 29.



Il tetraedro $FAE\Phi$ è simile al $DBE\Delta$, e diverrebbe anche similmente posto se lo si facesse rotare di due retti intorno alla perpendicolare in E alla faccia $A'B'B''A''$. Essendo pertanto $E\alpha\varphi f$ la posizione che prenderebbe il tetraedro per siffatta rotazione, è evidente che il raggio lucido ef, passando in f dal vetro nell'aria a traverso del piano parallelo alla faccia del prisma della quale $B'B''$ è traccia, percorrerebbe il cammino $f\omega$ parallelo al cammino DL. Ma, con una rotazione contraria alla precedente, $f\omega$ verrebbe a coincidere con $F\Omega$; dunque $F\Omega$ fa coi piani R e W gli stessi angoli che DL.

Non richiedendosi la perpendicolarità del raggio lucido agli spigoli del prisma, la diottra a prisma permetterà dunque, non meno della diottra a palette, di mirare a punti più o meno ele-

vati o depressi rispetto al piano orizzontale dello spigolo fiduciale.

E nell'impiego del prisma per livellare si potrà miraro in direzione obbliqua agli spigoli sino a fare con questi un angolo anche maggiore di quello che con essi fa la diagonalo $A'B''$ (fig. 29); giacchè l'angolo d'incidenza del raggio lucido LD è maggiore dell'angolo di rifrazione. È facile il calcolare qual grandezza deva avere l'angolo $B'A'B''$ affinchè si possa battere i punti per tutto il giro d'orizzonte con due posizioni del prisma, dall'una all'altra delle quali il prisma passi con un quarto di giro; o guardando, ben inteso, sì nell'una che nell'altra posizione, tanto da $A'A''$ verso $B'B''$ quanto viceversa.

18. Nel 1851 il prof. Bauernfeind mostrava come con due prismi aventi per basi triangoli isosceli e rettangoli si potesse costituire uno squadro allineatore, a cui dava il nome di croce di prismi (*Prismenkreuz*). Lo strumento però non era destinato a risolvere immediatamente anche il problema di trovaro il piede della perpendicolare condotta da un punto dato sopra un dato allineamento. Idoneo anche a ciò egli trovava più tardi, come già dicemmo nel n.° 12, un prisma a base pentagona. Ma poco dopo riconobbe che, modificando il modo di sovrapposizione dell'un prisma all'altro, anche la croce di prismi si presta a risolvere eziandio questo problema. Nell'ultima edizione della citata sua opera egli descrive lo strumento e nella foggia di prima e nella modificata; noi lo descriveremo brevemente in quest'ultima foggia.

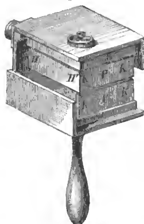
Lo strumento consiste di due prismi P, p (fig. 30) della forma considerata nei n.[i] 7 e 8, eguali tra loro, e per mezzo di opportuna montatura assicurati l'uno sopra l'altro in modo che le faccie o cateti HH', KK' dell'uno siano rispettivamente paralleli ai cateti hh', kk' dell'altro. Le ipotenuse riescono quindi tra loro perpendicolari.

Consideriamo le proprietà che hanno luogo in siffatta combinazione di prismi tanto pei raggi semplicemente come per quelli doppiamente riflessi.

Raggi semplicemente riflessi. Dai punti lontani L, l vengano i cilindri lucidi LD, ld (fig. 31), il primo al prisma superiore ABC, l'altro all'inferiore abc, entrambi normalmente agli spigoli. Il cilindro LD, comportandosi come si è visto nel n. 7,

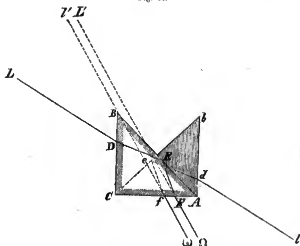
uscirà pel cateto CA secondo la direzione $F\Omega$ formando colla

Fig. 30.



normale al cateto stesso un angolo eguale a quello d'incidenza,

Fig. 31.



che diremo I. Similmente, designando con i l'angolo d'incidenza di ld, sarà ancora i l'angolo che il cilindro $f\omega$ emergente dal prisma abc formerà con la normale al cateto ca. E poichè queste due normali sono tra loro parallele, sarà:

$$\pm I \pm i$$

l'angolo compreso tra $F\Omega$ ed $f\omega$.

Ora esaminiamo in quale circostanza possa riuscire nullo quest'angolo, ossia aver luogo il parallelismo tra $F\Omega$ ed $f\omega$; nel qual caso un osservatore, che guardi ad un tempo nei due prismi per le rispettive faccie AC ed ac, vedrà le imagini L', l' di L, l in una stessa direzione. Affinchè la quantità $\pm I \pm i$ sia zero bisogna che I ed i siano eguali e preceduti da segni contrari. Ma ciò è come dire che i cilindri lucidi LD ed ld devono fare colle normali alle rette BC e bc angoli d'egual grandezza, l'uno verso B e l'altro verso c, oppure l'uno verso C e l'altro verso b. Questi cilindri lucidi adunque devono essere tra loro paralleli.

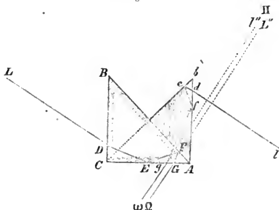
E però, se un operatore voglia con questo strumento inserire un punto Q nell'allineamento determinato da due paline L ed l, basta che, tenendo lo strumento in modo che le faccie oculari (KK', kk') stiengli verticalmente dinanzi ad un occhio, e le faccie obbiettive (HH', hh') ricevano luce rispettivamente da L ed l, si muova trasversalmente ad Ll sino a quando le imagini L' ed l' gli si mostrino in un medesimo allineamento coll'occhio (si sovrappongano); poichè ivi le rette LD, dl saranno tra loro parallele, ossia saranno porzioni dell'allineamento Ll.

Questa applicazione della croce di prismi poggia, come si vede, sulla stessa proprietà dimostrata nel n.° 11 per le faccie RB e RC (fig. 17) del prisma di Wollaston pulite a specchio esternamente. Nel presente caso fanno da specchi ortogonali le ipotenuse dei due prismi. Per entrambi i casi vogliamo notare che la direzione o l'allineamento, secondo cui l'occhio vede le due imagini, dipende da I, e quindi cambia se si gira lo strumento, e non risulta perpendicolare all'allineamento Ll se non quando riesca $I = i = 0$, il che non vien denunziato dal fenomeno di sovrapposizione delle imagini L', l'. Perciò queste imagini, dovute ciascuna ad una sola riflessione, non possono ser-

vire per risolvere il problema di mettersi ad un tempo nell'allineamento o nel piede della perpendicolare ad esso calata da un punto dato.

Raggi doppiamente riflessi. Bensì possono servire a questo intento le imagini dovute ciascuna a due riflessioni. Ed invero, sieno $G\Omega$, $g\omega$ (fig. 32) i cilindri lucidi emergenti provenienti rispettivamente dai cilindri LD, ld dopo le due riflessioni indicate nella figura e già studiate nel n.° 8; sappiamo che $G\Omega$,

Fig. 32



$g\omega$ sono rispettivamente perpendicolari a LD, ld. Dunque, ogniqualvolta si giunga collo strumento in un luogo dove le imagini L'', l'' riescano l'una all'altra sovrapposta, vale a dire, dove $G\Omega$, $g\omega$ riescano paralleli; ivi riusciranno anche paralleli LD, ld, ossia quel luogo apparterrà all'allineamento Ll. E siccome la direzione secondo cui si vedranno L'', l'' sarà normale ad Ll, perciò si potrà mettersi nel tempo stesso nel piede della perpendicolare ad Ll calata da un punto H, cercando quella posizione nella quale H guardato direttamente compaja in una medesima direzione con L'', l''.

Come già notammo nel n.° 8, la imagine di L si dovrà cercare in K oppure in K' (fig. 30), secondochè il cilindro lucido LD farà col cateto HH' l'angolo ottuso verso H o verso H'. Che poi, quando lo strumento sia nell'allineamento Ll, la ima-

gine l'' sia da trovarsi sotto L'' (cioè l'' in k' se L'' in K, od l'' in k se L'' in K'), ciò scaturisce anche dal riflesso che l'angolo ottuso di ld col cateto hh' sarà volto in senso contrario dell'ottuso di LD con HH'.

Quanto all'uso dello strumento come squadro non abbiamo nulla da aggiungere al già detto nel n.° 10. Evidentemente servirà a tale officio il prisma superiore (giusta la fig. 30), se la luce verrà dalla banda sinistra di chi tiene lo strumento; il prisma inferiore, se dalla destra.

19. Agli strumenti considerati nei n.ⁱ 10, 11, 12, 13, 14 non si possono applicare viti di rettifica; e all'ingegnere non resterebbe che di restituire il prisma all'artefice, qualora i suoi angoli differissero in grado non tollerabile da quelli supposti nei detti numeri. Ma nella diottra a prisma, nel livello a prisma o nella croce di prismi, spettando pur sempre all'artefice di ridurre gli angoli dei prismi alle prescritte grandezze, si potrebbero mettere viti per rettificare: nella diottra, la posizione del prisma rispetto a quella parte d'istrumento che, per fissar le idee, chiamammo regolo; nel livello, la posizione del prisma rispetto alla livella; e nella croce di prismi, la posizione dell'un prisma rispetto all'altro. Per la diottra e pel livello però il professore Porro non usa viti, volendo che la unione del prisma col resto dello strumento sia fatta in tutta regola a dirittura invariabilmente dall'artefice. Bensì le viti si trovano nella croce di prismi, di sotto, di sopra e in un fianco dello strumento, come in parte sta espresso nella fig. 30.

I modi di verificare con operazioni sul terreno se gli angoli dei prismi siano quali dovrebbero essere sono gli stessi che si praticano per i corrispondenti strumenti non a prisma, e perciò non occorre di qui indicarli. Nella propria officina il prof. Porro fa queste verificazioni, come già accennammo nel n.° 5, in modo eccellente.

Per verificare nella croce di prismi se l'un prisma sia debitamente collocato rispetto all'altro, si esamina: 1.° se gli assi dei prismi siano tra loro paralleli; 2.° se i cateti dell'uno siano paralleli ai cateti dell'altro.

Per riconoscere se gli assi dei prismi siano paralleli, basta osservare nelle due faccie oculari (KK', kk') le imagini di due oggetti paralleli, come sarebbero canne verticali, aste di para-

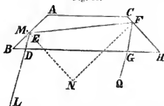
fulmini, spigoli di muraglie, ecc. Se le due imagini facessero tra loro un angolo, quest'angolo indicherebbo un errore esistente nella direzione rispettiva degli assi dei prismi; errore da togliersi colle opportune viti di rettifica.

Per riconoscere se sieno paralleli i cateti, basta disporre tre paline a distanze piuttosto grandi tra loro in uno stesso allineamento, e, tenendo lo strumento sulla palina di mezzo, osservare se le imagini delle altre due paline si sovrappongano. Se questa sovrapposizione avrà luogo, i cateti saranno paralleli. Nel caso contrario, l'angolo sotto cui si vedranno le due imagini indicherà il doppio dell'errore nella direzione delle faccie dell'un prisma rispetto a quelle dell'altro; e però colle viti opportune bisognerà far girare l'un prisma della metà di esso angolo.

20. Nel n.° 6 dicemmo che le applicazioni dei prismi, le quali formano l'oggetto di questo secondo capitolo, si fondano principalmente sul fenomeno della riflessione totale. Ma, per concentrare meglio l'attenzione sui cambiamenti di direzione che la luce subisce traversando i prismi, non ci fermammo ad esaminare nei numeri precedenti se ed entro quali limiti ogni singola riflessione fosse totale o no. Perciò diamo ora un pajo d'esempi di questo esame, dai quali il lettore vedrà come egli possa, con ogni facilità, in tutti i casi sopra esposti ed in altri che gli si potessero offrire, riconoscere l'indole di ciascuna riflessione insieme coi limiti entro i quali l'indole non muti, cioè dire la riflessione resti sempre o totale od ordinaria.

Primo esempio. Consideriamo il prisma allineatore del professor Porro (n.° 13). Sieno DM, MN, NF (fig. 33) le nor-

Fig. 33.



mali alle faccie HB, BA, CH, e dicasi r l'angolo MDE di rifrazione, che terremo come positivo nel caso della figura, come

negativo se dall'altra parte della DM, il qual angolo si dedurrebbe da quello d' incidenza i di LD colla solita formola $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r$. Riflettendo che l'angolo nella prima riflessione, cioè DEN, è esterno (nel caso della figura; interno nell'altro caso) pel triangolo DEM; e che l'angolo nella seconda riflessione, cioè NFG, è eguale al BED, perchè le rette FN, FG sono parallele alle EB, ED; si ottiene

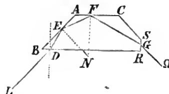
$$DEN = 45^\circ + r, \quad NFG = BED = 45^\circ - r.$$

Di qui si vede, che, per r positivo la riflessione in E sarà sempre totale, mentre quella in F sarà totale o no, secondochè r sarà più piccolo o no della differenza tra 45° e l'angolo limito 41° 48′ (n.° 6). Per r negativo, la riflessione in F sarà sempre totale, mentre potrà non esserlo quella in E.

In compendio possiamo dire che avrà luogo riflessione totale in entrambe od in una sola delle faccie secondochè il valore assoluto di r sarà più piccolo o più grande di 3° 12′.

Secondo esempio. Consideriamo lo squadro del prof. Porro (n.° 14). Sieno EN, FN (fig. 34) le normali alle faccie riflettenti BA, AC, ed ancora r l'angolo di rifrazione del raggio

Fig. 34



lucido in D. Si ottiene l'angolo DEN o NEF come dianzi, e l'angolo EFN dall'eguagliare a 180° la somma degli angoli del triangolo EFN, in cui N vale 45°. Si hanno così le formole

$$DEN = 45^\circ + r, \quad EFN = 90^\circ - r.$$

Affinchè il raggio DE incontri realmente la faccia BA bisogna che sia

$$-90^\circ < r < 45^\circ.$$

Affinchè poi il raggio EF incontri realmente la faccia AC dev'essere

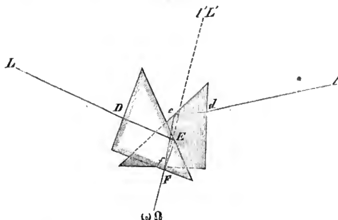
$$0 < r.$$

Dunque r dev'essere compreso tra 0 e 45°; e quindi le riflessioni in E ed in F saranno entrambe totali.

21. Stimiamo superfluo al nostro scopo l'indicare minutamente tutte le applicazioni che già si sanno fare degli strumenti che abbiamo descritti. E però chiuderemo la nostra rivista con la sola seguente osservazione relativamente alla croce di prismi.

Questo strumento si presterebbe ad ancor più svariate applicazioni, se lo si costruisse non già a prismi fissi l'uno rispetto all'altro, ma girevoli per guisa che, coll'aggiunta di un circoletto graduato, si potesse formare un angolo qualunque tra le loro faccie oculari. È sùbito visto che, se queste faccie formassero tra loro l'angolo α, le imagini L', l' di due paline L, l (fig. 35) non si presenterebbero sovrapposte, se non quando l'osservatore fosse collo strumento in un punto dell'arco di

Fig. 35.



circolo passante per L, l o capace dell'angolo $180° - 2\alpha$. E però, se, per esempio, l'osservatore volesse segnare sul terreno

questo arco di circolo, come occorre nel tracciamento delle risvolte circolari, basterebbe che camminasse regolandosi in modo da conservare la sovrapposizione delle imagini.

Senza voler scemare l'incontrastabile utilità della croce di prismi, diremo che lo strumento modificato, come suggeriamo, sembrerebbe meritevole di essere provato. Esso non va confuso col circolo a prismi del sig. STEINHEIL, dovendo rimanere nella sfera degli strumenti destinati alle operazioni d'ordine inferiore, e però conservarsi molto piccolo, non molto delicato, e costare all'incirca soltanto il doppio della croce di prismi fissi (*).

(*) Il prezzo di questa croce varia, a seconda della grandezza dei prismi e della comodità delle correzioni, da lire 25 a lire 55.
Il prezzo di uno squadro-allineatore PORRO è circa lire 35.

PARTE II.

SEZIONE PRIMA.

NOTIZIE STORICHE

ED

ENUNCIAZIONE DELLE PRECIPUE PROPRIETÀ CARDINALI.

CAPITOLO I.

Notizie sui lavori pubblicati dal 1840 ad oggi.

1. La teoria degli strumenti ottici trovasi tuttora esposta in quasi tutti i trattati di fisica, di topografia, di geodesia e di astronomia in modo non del tutto adeguato al cresciuto bisogno di precisione ed al grado di perfezione a cui la teoria stessa fu portata da trent'anni in qua. A conferma di ciò basterebbe osservare a dirittura, soltanto, le migliori opere pubblicate sugli strumenti della geometria pratica, che credo essere le due preziosissime seguenti:

Die geometrischen Instrumente der gesammten praktischen Geometrie (Hannover, 1864) del prof. HUNÄUS;

Elemente der Vermessungskunde (Stuttgart, 1869) del professore BAUERNFEIND.

Di questo fatto dovetti accorgermi, e riconoscerne le perniciose conseguenze nell'insegnamento della geodesia, che fui chiamato a dare presso l'Istituto tecnico superiore di Milano.

Persino del concetto principale per l'uso di un cannocchiale munito di fili, del concetto voglio dire di linea di collimazione

o di fiducia, si cercherebbe invano nella massima parte di essi trattati una definizione esatta e chiara. Per certo, non è questo l'ultimo motivo della incompleta soddisfazione che molti ingegneri ritraggono dallo studio delle parti risguardanti gli strumenti con cannocchiali a fili, nei trattati medesimi, e dell'incresciosa incertezza in cui si trovano quando devano con tali strumenti conseguire un certo grado di precisione, sia nel misurare angoli o nel livellare.

Parecchi scrittori hanno già dedicato, come vedremo, la penna al divulgamento della progredita teoria in Germania; lo stesso fecero altri per la Francia e per l'Inghilterra; col presente opuscolo io vorrei fare lo stesso per l'Italia.

L'ordinamento suo, qualche punto della trattazione analitica, e sopratutto le ricerche nuove contenutevi, mi lasciano sperare che possa prendere posto onorato anche fra i lavori d'oltralpe; ma principalmente risponderà esso al mio desiderio, se i nostri giovani ingegneri lo stimeranno non indegno dell'occasione per cui viene in luce, e, trovandovi un sussidio bastevole per riparare al difetto su accennato, lo vorranno tenere in considerazione quasi fosse uno tra i capitoli degli egregi *Principii di Geodesia* di cui il prof. Schiavoni li ha dotati.

2. La teorica degli strumenti ottici si divise quasi fino dall'origine sua in due parti. Nell'una parte si rintracciarono le proprietà cardinali di ogni sistema ottico, o propriamente di ogni sistema costituito da una successione di mezzi differenti, separati da superficie sferiche rifrangenti o riflettenti, coi loro centri in una medesima retta, asse centrale del sistema. Cardinali mi par bene di dire le proprietà ottenute col supporre: 1.° che i raggi di luce siano omogenei; 2.° che per tutto il loro corso attraverso il sistema facciano angoli piccolissimi coll'asse centrale; 3.° che facciano angoli pure piccolissimi colle normali d'incidenza; o, ciò che è lo stesso, che le superficie dividenti siano limitate ciascuna ad una calotta col polo nell'asse e con contorno circolare di raggio (semiapertura della superficie) assai piccolo in confronto del raggio della sfera di cui è porzione.

Nella seconda parte studiaronsi le alterazioni che nelle proprietà cardinali induce l'abituale mancanza della prima condizione e l'insufficiente adempimento delle altre due; e le disposizioni da prendersi affinchè queste alterazioni, se non affatto distrutte, siano attenuate così da riuscire insensibili all'occhio.

Di queste due parti, la prima, assai più facile, si può dire ormai portata all'ultimo grado di perfezione; mentre la seconda, pur avendo progredito e giovato assai al perfezionamento pratico degli strumenti, aspetta sempre nuovi perfezionamenti dal progresso della matematica, della fisica e della chimica.

3. Fortunatamente la prima è anche la sola veramente indispensabile a conoscersi dal topografo e dal geodeta, ed alla medesima si ristringe il presente opuscolo. Del resto, pel giusto apprezzamento della importanza di questa parte giova anche riflettere fin d'ora: che essa è gradino indispensabile per la trattazione della seconda parte; che uno strumento ottico è tanto più perfetto quanto meglio s'accosta a possedere le proprietà cardinali; che ad ogni modo deve possederle rigorosamente per rispetto ai raggi che lo traversano nelle condizioni ammesse nella prima parte; e che sarebbe inutile di procurare ad uno strumento altre proprietà, senza assicurargli anzitutto le cardinali.

4. Fu colla scoperta delle prime fra queste proprietà che si iniziò con Keplero la teoria. Ritraendo ormai affatto l'attenzione dalla seconda parte, per volgerla esclusivamente alla dottrina delle proprietà cardinali, questa, dopo le ampie pubblicazioni principalmente di Eulero, pareva toccare al suo compimento colle memorie di Lagrange (1778, 1803), Piola (1821) e Möbius (1830). Ma nello stabilire esse proprietà, alle tre supposizioni sopra indicate altre due se ne erano aggiunte, vale a dire che, trattandosi di lenti, se ne potessero considerare le grossezze come infinitamente piccole ossia trascurabili; e che i raggi incidenti esistessero tutti in piani passanti per l'asse centrale, ossia incontrassero questo asse nel finito o all'infinito.

La supposizione della trascurabilità delle grossezze delle lenti, sebbene divenuta, come Gauss fece poi osservare, tanto abituale da essere quasi sempre tacitamente sottintesa, pure fa sì, che le proposizioni della teoria non soltanto abbiano in ogni caso reale un valore puramente approssimativo, ma che talvolta esprimano anche soltanto un'approssimazione grossolana. Di questo è facile andar persuasi, se si riflette che, sopratutto nelle lenti oculari, le grossezze sono ben lontane dall'essere frazioni insensibili dei loro raggi di curvatura, e possono anche divenire influenti quanto altre grandezze conservate nel calcolo. La dannosa influenza di questa supposizione si palesa anche nelle prime definizioni della

teoria; come ne fa prova quella di **distanza focale** di una lente, la quale, se non si aggiunga verun'altra determinazione, si resta incerti se si deva intendere misurata dalla più vicina superficie della lente, o dal così detto centro ottico, o dal punto di mezzo della grossezza, mentre poi nè anche uno di questi tre modi è il giusto. Del resto con tutto ciò non s'intende di negare che in moltissimi casi sia lecito od utile od anche necessario di trascurare le grossezze delle lenti, come quando il considerarle tragga con sè lungaggini insuperabili, o ad un calcolo preciso giovi farne precedere uno approssimativo, o non importi molta precisione.

Più arbitraria ancora della discorsa deve parere l'altra supposizione, se si riflette che in generale i raggi che non incontrano l'asse sono in copia di gran lunga maggiore di quelli che lo incontrano. Di tutti i raggi, per esempio, che emanano da un punto luminoso fuori dell'asse, incontrano questa retta quelli soltanto che corrono nel piano determinato dalla medesima e dal punto luminoso. Tuttavia, per ciò che riguarda la prima parte della teoria degli strumenti ottici, questo difetto era assai più facile a ripararsi; bastando dimostrare che i raggi di luce uscenti da un punto, incontrino o no tutti l'asse centrale, dopo la rifrazione concorrono tutti ancora in un punto, per potere legittimamente fabbricare la teoria cardinale delle imagini coll'esclusivo impiego di raggi che incontrano l'asse.

5. Però la teoria Euleriana, non ostante i lavori di LAGRANGE, di PIOLA e di MÖBIUS, esigeva ancora radicali perfezionamenti. Questi furono attuati quasi ad un tempo da GAUSS e da BIOT, ed in parte anche da BESSEL coi seguenti lavori:

GAUSS, *Dioptrische Untersuchungen*. Memoria presentata nel dicembre 1840 alla R. Società delle Scienze di Gottinga, che si legge nel tomo I (1843) delle *Abhandlungen* di essa Società, e nel tomo V dei *Gauss Werke* editi dalla stessa, e tradotta in francese nel tomo XXXIII (1851) degli *Annales de Chimie et Physique*;

BIOT, *Traité élémentaire d'Astronomie physique*, 3me édition. Il lavoro di ottica, a cui qui si allude, costituisce il capitolo IX, che abbraccia la seconda metà del tomo I (Parigi, 1841) e la prima del II (Parigi, 1844);

BESSEL, *Ueber die Grundformeln der Dioptrik*. Memoria inserta nel tomo XVIII (1841) delle *Astronomische Nachrichten*.

Gauss e Biot considerano entrambi e per i primi nella sua vera generalità un sistema ottico come fu detto in principio, cioè uno strumento costituito da un numero qualunque di mezzi separati da superficie sferiche coi centri in una retta, del quale un sistema di lenti è dunque caso particolare; ed imaginandone determinati i punti mediante coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, e prendendo come asse delle x la retta dei centri; col soccorso di semplicissime considerazioni geometriche ricercano come dai parametri delle equazioni, che rappresentano un raggio di luce incidente qualsiasi, dipendano i parametri delle equazioni che rappresentano il medesimo raggio di luce all'uscire dal sistema; la quale ricerca si risolve nelle due analoghe per le projezioni del raggio lucido sui piani xy e xz, e non riesce più complicata di quella che si soleva fare pei raggi in piani con l'asse e trascurando le grossezze delle lenti.

I parametri d'emergenza risultano funzioni lineari omogenee dei parametri d'incidenza, contenenti in tutto soltanto quattro coefficienti che dipendono dagli elementi geometrici e fisici del sistema. Questi coefficienti hanno tra loro una relazione per la quale uno resta fissato dagli altri tre, e tutta l'azione del sistema sui raggi di luce che lo traversano, sotto le tre condizioni ammesse in principio, dipende soltanto da questi tre coefficienti.

Biot traduce questi coefficienti in tre elementi ottici (tomo I, pag. 427), ingrandimento angolare, distanza focale principale (contata dall'ultima superficie), posizione del punto oculare, che dice clementi specifici del sistema; e svolge un ampio trattato delle proprietà cardinali di questi sistemi e poscia in particolare dei sistemi di lenti e degli strumenti in uso, venendo infine allo studio delle aberrazioni.

Il lavoro di Gauss è molto più ristretto; lo studio delle aberrazioni vi è soltanto toccato, nè vi si fanno applicazioni a strumenti particolari. Ma Gauss, inspirato, mi sembra, come dirò, dalle già nominate ricerche di Möbius (*), mette in chiaro la esistenza e l'alta importanza di due punti, che per ciò chiama

(*) Inserte nei tomi V e VI (1830) del giornale di Crelle coi titoli: *Kurze Darstellung der Haupt-Eigenschaften eines Systems von Linsengläsern*, e: *Beiträge zu der Lehre von den Kettenbrüche, nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts.*

principali (*Hauptpunkte*), le cui proprietà, insieme con quelle dei fuochi e piani focali principali, riassumono in modo semplicissimo e chiarissimo, analiticamente come geometricamente, quasi tutta la dottrina delle proprietà cardinali, di guisa che con essi la funzione ottica di uno strumento si traduce in una forma geometrica la più semplice che sembri possibile, e che è la stessa sia che lo strumento contenga una sola od un numero qualunque di superficie dividenti. In altri termini, dati questi punti, tutti gli effetti ottici (cardinali) del sistema se ne deducono con costruzioni geometriche di semplicità sorprendente, assai preferibili a quelle indicate da Biot (tomo I, pag. 445).

Ma, sebbene abbia peccato di prolissità e non abbia côlto nel segno così felicemente come Gauss, pure l'illustre fisico francese porge nella sua opera tanta copia di importanti considerazioni sugli strumenti in generale ed in particolare, che sembra proprio ingiusto di non trovarlo presso molti scrittori noverato fra quelli che maggiormente contribuirono all'odierno progresso.

Quanto a Bessel, egli considera esclusivamente un sistema di lenti, e raggi in piani con l'asse, ed ha per iscopo, non di porgere teoremi nuovi, ma di mostrare che sussistono senza complicazioni i già noti, anche tenendo conto delle grossezze delle lenti; il quale scopo egli raggiunge dimostrando la esistenza dei punti che denomina *optische Mittelpunkte*, e che sono i principali di Gauss, ed il teorema che la somma delle reciproche distanze focali conjugate, misurate da questi punti, eguaglia la reciproca distanza focale principale, che è uno di quelli esposti da Möbius nel 1830, trascurando le grossezze delle lenti.

I lavori di Möbius, di Gauss e di Bessel porsero argomento al programma *De formulis dioptricis*, con cui Encke preludeva nel 1844 al suo corso d'Astronomia in Berlino, sul quale però non trovo necessario di soffermarmi.

6. Offrendo la miglior soluzione possibile del problema di determinare il cammino secondo cui un raggio di luce esce da uno strumento ottico, la memoria di Gauss lascia però campo a giunte e perfezionamenti di non poco rilievo. Principale tra questi è la scoperta della terza coppia di punti cardinali, cioè dei punti nodali, della quale il merito, secondo i lavori che sono a mia notizia, dovrebbesi dare a Biot ed al sig. Listing, e non a Möbius, come leggesi in parecchi scrittori. Biot dimostra

l'esistenza di questi punti, che denomina *centres conjugués*, alla pag. 473 del tomo I dell'*Astron. phys.*; però non ne trae poscia verun profitto. Il sig. Listing invece nell'opuscolo stampato a Gottinga nel 1845 col titolo: *Beitrag zur physiologischen Optik*, ne riconosce la grande importanza. Dopo averne definita la posizione a pag. 10, e proposta la denominazione di *Knotenpunkte*, indica a pag. 11, egli pel primo, ch'io sappia, l'uso del secondo punto nodale per attuare quella semplificazione nella costruzione Gaussiana del raggio emergente, che Gauss suggeriva soltanto pel caso dei mezzi estremi identici. Lo stesso autore somministrò poi all'*Handwörterbuch der Physiologie u. s. w.* di Wagner una *Mathematische Discussion des Ganges der Lichtstrahlen im Auge* (tomo IV, 1853), nei primi venti articoli della quale riproduce in chiarissima esposizione la teoria di Gauss, presentando infine (art. 18) anche i punti nodali, dei quali giustifica la denominazione, mentre ne spiega completamente l'officio.

Circa il riferire la scoperta dei punti nodali al lavoro di Möbius del 1830, osservo che in esso lavoro, come in tutti quelli che concernono sistemi di lenti, questi punti non avrebbero potuto comparirvi distinti dai principali; e che della proprietà caratteristica dei punti nodali (parallelismo dei cammini d'incidenza e d'emergenza) in nessun luogo di quel lavoro è fatto cenno.

Vi sono invece chiaramente indicati per le più notevoli loro proprietà i punti principali (tomo V, pag. 122, § 10). E non mi sembra inopportuno di rilevare che, mentre la principalissima loro proprietà (che imagine ed oggetto nei piani principali sono eguali ed egualmente posti) in questo lavoro è dichiarata esplicitamente, nel lavoro di Gauss bisogna contentarsi di trovarla implicita nelle equazioni dei cammini d'incidenza e d'emergenza riferiti ai punti principali o nella costruzione del raggio emergente. E però, quantunque Möbius non insegni questa costruzione e non cavi insomma il profitto che si deve dai punti principali, e trascuri le grossezze delle lenti, pur tuttavolta vorrei dire che, non la scoperta dei punti nodali, ma quella dei principali sarebbe da attribuirglisi, e da dividere tra lui e Gauss il merito di avere tradotta la funzione di uno strumento ottico nell'odierna semplicissima forma geometrica, mentre da alcuni scrittori sembra opinarsi altramente.

7. Nuovi meriti si acquistò Möbius in questo medesimo argomento pubblicando nel tomo VII (1855), dei *Berichte über die Verhandlungen* della R. Società delle Scienze di Lipsia una *Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineations-Verwandschaft*, nella quale considera non più soltanto un sistema di lenti infinitamente sottili, ma un sistema diottrico generale come quello di Gauss e di Biot, e dimostra le proprietà che per esso scaturiscono nelle relazioni tra oggetti ed imagini, non col soccorso delle frazioni continue, come nel 1830, ma per via puramente geometrica. Möbius non si occupa di singoli raggi, ma soltanto di oggetti ed imagini. La Memoria è veramente pregevole per eleganza e facilità; sebbene non si deva cercarvi una completa teoria delle proprietà cardinali. Mi contenterò di avvertire che neanche qui è fatta parola dei punti nodali, ma che i principali vi sono anch'essi lasciati in disparte; e che non vi si considerano due distanze focali, ma una sola, media geometrica fra le due di Gauss.

8. Della teoria di Gauss però, completata con la introduzione dei punti nodali, compare ben tosto una nuova trattazione ancora in un lavoro fisiologico, e cioè colla prima dispensa (1856) della *Encyklopädie der Physik* di Karsten nella prima parte della *Physiologische Optik* del sig. Helmholtz. A viemeglio divulgare la cognizione di essa teoria, l'autore premette una semplice enunciazione delle precipue proprietà dei punti e piani cardinali, con le costruzioni del raggio emergente e dell'imagine. Ma, forse pel suo titolo, quest'opera insigne non sembra essere stata osservata quanto meriterebbe da tutti quelli che hanno a fare cogli strumenti ottici.

Oltre poi la traduzione francese di quest'opera, venuta in luce nel 1867 (a cui e non all'originale si riferiranno in seguito le mie citazioni), le seguenti altre pubblicazioni si fecero in questi ultimi anni, per le quali dovrebbe oltralpe diffondersi bastevolmente la cognizione della nuova teoria:

On the General Laws of Optical Instruments; Memoria del sig. J. C. Maxwell inserta nel volume II (1858) del *Quarterly journal of pure and applied mathematics;*

Traité du lever des plans, etc. Parigi, 1865, dell'ing. P. Breton de Champ;

Haupt-und Brenn-Puncte eines Linsens-Systemes, Lipsia, 1866, del prof. C. Neumann;

Des images par réflection et par réfraction; Memoria del prof. J. Gavarret inserta nella *Revue des Cours scientifiques*, che può aversi anche a parte (Parigi, 1866);

Interprétation géométrique et continuation de la théorie des lentilles de Gauss, Memoria del prof. A. Martin inserta negli *Annales de Chimie et Physique* pel 1867 (4me serie, tome X);

Constructionen zur Lehre von den Haupt-und Brennpunkten eines Linsens-Systems, Lipsia, 1870, del prof. E. Reusch;

Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen, Memoria del sig. P. A. Hansen, inserta nel tomo X (1871) delle *Abhandlungen* della classe mat.-fis. della R. Società delle Scienze di Lipsia, che può pure aversi a parte.

L'opuscolo del prof. Reusch, che, come il titolo accenna, è una trattazione grafica della teoria, si connette più specialmente con quello del prof. Neumann, il quale va singolarmente distinto per la semplicità e la chiarezza che s'accompagnano alla pochezza di cognizioni matematiche che presuppone. L'opuscolo del prof. Neumann è destinato a rendere affatto popolare la teoria, non a farla conoscere per intero. Non vi si troverebbe la determinazione dei punti cardinali di un sistema per mezzo de' suoi elementi geometrici e fisici (il che del resto può dirsi di tutte, in genere, le trattazioni fatte con geometria piuttosto pura che analitica); nè quella dell'ingrandimento; non il caso dei telescopi; nè applicazioni a singoli strumenti, delle quali però se ne trovano nell'opuscolo del sig. Reusch.

Ma tralasciando ogni altro particolare sui citati lavori, mi limiterò ad una riflessione relativamente a quello del sig. Hansen, e ad un rendiconto di quello del sig. Maxwell, che presenta in confronto degli altri un carattere affatto originale.

9. La Memoria del sig. Hansen si compone di tre parti. Nella prima espone due modi di calcolare rigorosamente il cammino di un raggio di luce a traverso il sistema; nella seconda riproduce la Memoria di Gauss, aggiungendovi molte altre formole che scaturiscono dall'uso delle distanze focali conjugate, neglette affatto nella Memoria di Gauss; nella terza infine presenta applicazioni numeriche delle due precedenti. La riflessione che voglio fare riguarda i punti nodali. È probabile che questi punti sieno sfuggiti a Gauss in causa della preoccupazione in cui egli

geodeta ed astronomo poteva essere pel caso dei mezzi estremi identici. Ora penso che la stessa causa sia quella che li fa trascurare dal sig. HANSEN, dicendo egli nella prefazione (pag. 66 della sua memoria) che hanno minore importanza dei principali, che MÖBIUS ne fu lo scopritore, e dandone come definizione quella della seconda coppia di punti da MÖBIUS indicati nel citato suo § 10, i quali sono invece quelli che si potrebbero chiamare (N. 22) punti d'isometria inversa. È quasi superfluo il dire, che, se l'illustre astronomo di Gotha avesse avuto l'agio di occuparsi dell'occhio od in generale del caso dei mezzi estremi diversi, avrebbe dato ai punti nodali l'alto posto che meritano, e riconosciuto che, quando per l'identità dei mezzi estremi vengono a coincidere coi principali, importa di avvertire che allora questi punti godono anche della proprietà caratteristica dei punti nodali, la quale sembra essenziale a considerarsi per fissare rettamente il concetto di linea di collimazione di uno strumento ottico.

10. Il sig. MAXWELL comincia collo stabilire per via geometrica molto semplice le leggi che regolano l'azione di uno strumento ottico, senza conoscerne l'interna costruzione, nè tampoco supporre che il medesimo agisca per riflessione e rifrazione, traendo tutti i suoi dati da due semplici esperimenti, e supponendo soltanto di sapere che il raggio di luce percorre cammino rettilineo prima d'entrare e dopo uscito dall'istrumento. In principio dimostra, che, se un istrumento somministra imagine perfetta di un oggetto piano a due distanze differenti, ad ogni pennello di raggi incidenti (*) corrisponderà un pennello di raggi emergenti, e ad ogni oggetto piano normale all'asse un'imagine perfetta. In altri termini, supposto perfetto uno strumento per due distanze differenti, dimostra che sarebbe perfetto per ogni distanza. Poi trova le note proprietà dei fuochi e punti principali, non che quelle dei sistemi telescopici, dando le formole che le compendiano nelle forme più chiare e più concise. Indi si propone di investigare fin dove questi risultamenti possano applicarsi agli strumenti attuali, in cui il cammino dei raggi di luce è regolato dalle leggi di riflessione e rifrazione. Si sa che questi strumenti possono costruirsi in modo da soddisfare approssi-

(*) Con pennello intendo significare un sistema di raggi che s'incrociano in un punto.

mativamente le condizioni di uno strumento perfetto, ma che la perfezione assoluta non venne finora raggiunta. Si domanda se dalle leggi di riflessione e rifrazione possa dedursene qualcuna da aggiungersi alle altre leggi generali degli strumenti ottici, e se le imperfezioni dei medesimi siano necessarie o rimovibili. In risposta, dimostra che non si può produrre imagine perfetta di un oggetto a due distanze differenti, per mezzo di una combinazione di riflessioni e rifrazioni, a meno che questa sia telescopica ed ingrandisca ogni dimensione nel rapporto degli indici di rifrazione dei mezzi estremi. E per la dimostrazione usa delle seguenti proprietà, familiari tra gli allevati nella teorica delle ondulazioni: I punti, ai quali arrivano in un medesimo istante i raggi di luce simultaneamente emanati da un punto luminoso, costituiscono una superficie normale ad essi raggi. Se i raggi simultaneamente emanati da un punto devono concorrere in un fuoco, in esso fuoco giungeranno nel medesimo istante.

11. Venendo alla mia memoria (*), in essa svolgo la teoria delle proprietà cardinali, seguendo letteralmente, come soglio fare nelle lezioni di geodesia, la via breve ed elegante di Gauss, per la quale si viene ad abbracciare d'un colpo d'occhio tutto

---

(*) Non si voglia dimenticare che i brevi cenni storici premessi si riferiscono esclusivamente allo sviluppo della teoria delle proprietà cardinali degli strumenti ottici dal 1840 in poi. E però non rechi meraviglia il silenzio serbato sui lavori che non si riferiscono precisamente a questa teorica, come in particolare sarebbero quelli nei quali si andò svolgendo la bella teoria delle linee e superficie caustiche; e nemmeno quello serbato sopra i lavori che, pure trattando più o meno ampiamente delle proprietà cardinali, non ebbero queste a loro precipuo scopo, e dalle medesime non ripetono la loro importanza. E tra questi vogliasi noverare la *Nuova teorica degli stromenti ottici* del professore O. F. Mossotti, pubblicata nel tomo IV degli Annali dell' Università toscana, ed anche in copie separate (Pisa, 1857), con un'appendice che si legge pure nel tomo I degli Annali di matematica (Roma, 1858), causata dalle dotte *Osservazioni* del prof. F. Cattaneo contenute nel tomo stesso. Imperocchè i pregi di questo lavoro vanno cercati nella parte concernente le aberrazioni, mentre per la prima parte trovasi quasi affatto modellato su quello di Biot. A prevenire una domanda, altra volta pur fattami, mi sia concesso infine di aggiungere che, non qui, ma nel trattato delle aberrazioni e della costruzione degli strumenti, il lettore troverebbe citata la sempre preziosa *Teorica degli stromenti ottici* pubblicata nel 1828 dall'illustre astronomo di Padova.

il sistema delle formole più importanti, e si risolvono nel modo più chiaro ed immediato tutte le domande che si possono presentare circa l'esistenza e la determinazione di piani, rette e punti dotati di proprietà che possano interessare; mentre infine non presuppone che le più elementari fra le cognizioni di geometria analitica che si sogliono dare nelle nostre scuole. Aggiungo tutto ciò che a mio giudizio merita maggiormente di prender posto insieme con le cose di GAUSS, non dimenticando le applicazioni agli strumenti in uso; ed estendo la teoria ai sistemi imperfettamente centrati.

Poichè gli elementi della teorica dei determinanti entrano ora nei programmi dei nostri istituti tecnici, non ho voluto rinunziare ai vantaggi che il loro uso concede. I quattro coefficienti (g, h, k, l) che servono ad esprimere i parametri d'emergenza in funzione di quelli d'incidenza, si presentano in forma di particolari determinanti, così che parte delle loro proprietà si può dire già senz'altro, per la forma stessa, in evidenza (*); più dirette e più chiare riescono nel tempo stesso molte deduzioni.

Per il fatto notissimo che le equazioni, che legano tra loro i parametri delle equazioni dei successivi tratti del cammino del raggio di luce, hanno la stessa forma di quelle che legano tra loro i numeratori od i denominatori delle successive ridotte di una frazione continua, l'introdurre i determinanti nel nostro argomento vale come introdurli nella teoria delle frazioni continue. Ora voglio osservare che, sebbene l'idea di questa introduzione si presenti affatto spontanea per la solita ragione della forma lineare delle equazioni, tuttavia in nessuna pubblicazione, ch'io sappia, fino al 1870, la si vede attuata. Laonde il professore BRIOSCHI, che indicava la rappresentazione di una frazione continua in forma di quoziente di due determinanti sin da quando insegnava meccanica a Pavia, può riguardarsi siccome quegli che

(*) Di questo numero è quella (del resto anche altramente subito vista) che tre di essi coefficienti (g, h, l) sono le derivate parziali del quarto (k) rispetto agli estremi fra gli elementi che li compongono; per la quale, formata la espressione letterale di questo, si ottengono immediatamente le espressioni degli altri; proprietà che parrà strano di non vedere nemmeno mentovata da GAUSS, il quale rinvia il lettore ad EULERO, e di vedere che si presenta con qualche stento e come nuova a BIOT, il quale non la dà per intero che nel secondo tomo (pag. 21).

iniziò questa applicazione. Ma non ebbe l'occasione di ricercare le particolari proprietà di questi determinanti, che hanno gli elementi tutti nulli, tranne i principali e i loro attigui. Questa ricerca, che io presi a fare per le lezioni sugli strumenti ottici, è pure l'argomento del § 3 di una egregia Memoria del signor Thiele, *Den endelige Kjædebröksfunktions Theori*, che da poco seppi inserta nel tomo VI (Copenhagen, 1870) del *Tidsskrift for Mathematik*. Però mi astengo dall'esporre in questo lavoro le proprietà che pel medesimo non sono necessarie.

Il desiderio di rendere accessibile a chi si sia almeno una parte di questo scritto m'indusse a disporlo in guisa da permettere ciò che vengo a dire. Chi non posseda gli elementi della teorica dei determinanti, osservi la tavola conteneute gli sviluppi dei determinanti (k) sino all'ordine che può verosimilmente bisognare; che con essa e colle espressioni degli altri coefficienti (g, h, l) dedotte per derivazione potrà ancora tener dietro a quanto sarà esposto. Chi desideri di seguire l'analisi dei sistemi centrati, senza impegnarsi anche nello studio dei non centrati, faccia zero le p^m, q^n, i_β, i_b, i_γ, i_c nel capitolo primo della seconda sezione e tralasci poi di leggere il secondo, passando al terzo, che è redatto in continuazione del primo per lo svolgimento delle proprietà dei sistemi centrati. Finalmente chi desideri di conoscere i principali risultati, senza seguire l'analisi che li dimostra, troverà in questa prima sezione un'enunciazione dei medesimi, redatta per essere compresa anche da chi non avesse studiata la diottrica antica. Delle proprietà enunciate nel capitolo primo importa che tutti prendano cognizione; esse sono indispensabili per comprendere come l'occhio funzioni, e si applicano immediatamente (tenuto conto del coincidere dei punti nodali coi principali) agli obbiettivi ed agli oculari degli strumenti in uso ed agli strumenti stessi indivisi se non siano nella condizione di emettere paralleli i raggi che ricevono paralleli. Le particolari proprietà che i sistemi ottici acquistano in tal condizione (sistemi telescopici) sono esposte nei capitoli secondo e terzo; e quest'ultimo è steso in modo che ad esso possa passare immediatamente dopo il primo chi voglia considerare soltanto i telescopi in uso.

CAPITOLO II.

Enunciazione delle precipue proprietà cardinali di qualunque sistema diottrico, anche non centrato.

12. Consideriamo uno strumento o sistema diottrico costituito da un numero qualsivoglia di mezzi differenti separati l'uno dall'altro da superficie sferiche delle quali i centri siano in una retta o distino pochissimo da una retta medesima. La posizione e la grandezza delle imagini ottiche formate con luce omogenea da un simile strumento, od anche il cammino di ogni singolo raggio di luce che lo traversi facendo angoli piccolissimi colla retta sunnominata e colle normali alle superficie dividenti, possono determinarsi con regole molto semplici, a condizione di conoscere que' punti che si dicono i *punti cardinali* del sistema per la qualità di luce di cui si tratta. Di questi vi hanno tre coppie: i due *fuochi principali*, i due *punti principali*, i due *punti nodali*; tutti situati in una retta che diremo la *retta cardinale* del sistema.

Numerando ogni cosa nel senso secondo cui imaginiamo che la luce traversi lo strumento, diremo *prima* superficie dello strumento quella fra le sue superficie dividenti che per la prima vien traversata dalla luce, *ultima* quella che vien traversata per l'ultima; *primo* mezzo quello che precede la prima superficie, *ultimo* mezzo quello che segue l'ultima superficie.

Ogni raggio di luce che traversi lo strumento percorre una spezzata rettilinea coi vertici nelle superficie dividenti. Il primo tratto, ossia quello che il raggio percorre innanzi di traversare la prima superficie, si dirà *cammino d'incidenza*, e *retta d'incidenza* la retta illimitata

che lo contiene. L'ultimo tratto, ossia quello che il raggio percorre dopo traversata l'ultima superficie, sarà detto cammino d'emergenza, e retta d'emergenza la retta di cui è porzione.

A rette d'incidenza costituenti un pennello corrispondono rette d'emergenza che pure costituiscono un pennello. Il punto comune alle rette d'incidenza dicesi punto (anche oggetto) luminoso, e sua imagine quello comune alle rette d'emergenza. Ad un sistema di punti luminosi (discreto o continuo, di una, due o tre dimensioni) corrisponde un sistema di punti imagini (pure discreto o continuo, di una, due o tre dimensioni). Il primo sistema suol dirsi figura od oggetto (talvolta oggetto composto) radiante o luminoso; il secondo sua imagine (imagine composta).

13. La retta cardinale può definirsi dicendo che è ad un tempo retta d'incidenza e d'emergenza di un raggio di luce. Imperocchè in ogni sistema ottico esiste una ed una sola retta di tal fatta. Quando il sistema diventa centrato, questa retta diviene quella dei centri, ed allora può dirsi indifferentemente retta cardinale o asse centrale.

Il primo fuoco può definirsi dicendo che ad ogni retta di incidenza passante per esso corrisponde una retta d'emergenza parallela alla cardinale.

Il secondo fuoco può definirsi siccome punto pel quale passano tutte le rette d'emergenza corrispondenti a rette d'incidenza parallele alla cardinale.

I punti principali giova definirli per mezzo dei piani condotti per essi normalmente alla cardinale, i quali diconsi piani principali. Una porzione qualunque del primo piano principale ha per imagine la porzione del secondo piano principale ad essa eguale, ed egualmente posta rispetto alla cardinale. Ogni parallela a questa retta incontra dunque i due piani in punti di cui il secondo è l'imagine del primo. I punti principali primo e secondo sono le intersezioni dei piani principali primo e secondo colla cardinale.

I punti nodali sono definiti dalla proprietà che a qualunque retta d'incidenza passante pel primo corrisponde, qual retta d'emergenza, la parallela ad essa passante pel secondo.

Piani focali diconsi quelli condotti pei fuochi normalmente

alla retta cardinale. A rette d'incidenza che s'incrociano in un punto del **primo** piano focale corrispondono rette d'emergenza parallele tra loro, e però parallele alla retta che dal detto punto d'incrociamento va al primo punto nodale. E reciprocamente, a rette d'incidenza parallele tra loro corrispondono rette d'emergenza che s'incrociano in un punto del **secondo** piano focale, punto che giace nella parallela alle rette d'incidenza condotta pel secondo punto nodale.

I sei punti cardinali verranno costantemente designati colle lettere F, F^*; E, E^*; Ω, Ω^* rispettivamente secondo l'ordine in cui furono nominati. L'asterisco *, che usiamo seguendo Gauss, significherà sempre **ultimo**, ed **ultimo** converrà quindi pronunziarlo.

14. Nella espressione AB di una porzione della retta cardinale, mediante le lettere A e B che ne dinotano i termini, comprendiamo anche il segno, tenendo come positiva la espressione quando per passare da A a B si cammina nel senso medesimo della luce, come negativa nel caso contrario. Di guisa che sarà sempre $AB + BA = 0$.

La distanza FE dicesi **prima distanza focale principale**. La indicheremo più brevemente con Φ; e per la fatta convenzione, Φ sarà positiva ogniqualvolta camminando nel senso della luce si incontrerà F prima di E.

La distanza $E^* F^* = \Phi^*$ dicesi **seconda distanza focale principale**, positiva se la luce incontri E^* prima di F^*.

Dati i fuochi e i punti principali, i punti nodali restano determinati, essendo sempre

$$F\Omega = \Phi^*, \quad \Omega^* F^* = \Phi;$$

donde le eguaglianze

$$E\Omega = E^*\Omega^* = \Phi^* - \Phi, \quad EE^* = \Omega\Omega^*.$$

Le due distanze focali principali sono sempre dello stesso segno e stanno tra loro come gli indici (assoluti) di rifrazione dei mezzi estremi. Indicando con n, n^* questi indici o due numeri inversamente proporzionali alle velocità della luce (giusta la teorica delle ondulazioni) in essi mezzi, possiamo scrivere

$$\frac{\Phi}{n} = \frac{\Phi^*}{n^*}.$$

Laonde, se i mezzi estremi fossero otticamente identici, cioè se fosse $n = n^*$, come ha luogo nell'ordinario uso degli strumenti ottici, le distanze focali principali sarebbero eguali tra loro, Ω coinciderebbe con E, Ω^* con E^*. Ma questa coincidenza non ha luogo, per esempio, nell'occhio, pel quale i mezzi estremi sono l'aria e l'umor vitreo, e non avrebbe luogo in un cannocchiale di cui l'una estremità fosse immersa nell'acqua, restando l'altra nell'aria.

15. In ogni sistema ottico vige una perfetta reciprocità, consistente in ciò, che un raggio di luce, il quale abbia percorso un cammino a traverso del sistema, ritornerebbe a percorrere lo stesso cammino in senso inverso, se, retrocedendo per la retta secondo cui è uscito, rientrasse nel sistema. Laonde, invertendosi il senso secondo cui la luce traversa il sistema, due punti, che in prima fossero rispettivamente punto luminoso ed imagine, diverrebbero imagine e punto luminoso. Perciò due punti così scelti diconsi assai opportunamente punti conjugati tra loro in rispetto al sistema che si considera. E similmente conjugate diconsi due figure limitate o illimitate (come rette, piani) quando i punti dell'una siano i conjugati di quelli dell'altra. Quindi, in particolare, anche le rette d'incidenza e d'emergenza di un raggio di luce possono qualificarsi come rette conjugate.

16. Dicendo obbiettivo lo spazio ogniqualvolta si voglia che le figure in esso siano pensate come oggetti radianti, ed iconico (da εἰκών, imagine) quando si devano pensare come imagini, si può dire che con uno strumento ottico si viene a stabilire una corrispondenza tra i due spazii obbiettivo ed iconico, e tale che: a rette nell'uno corrispondono rette nell'altro; a pennelli di rette nell'uno, pennelli di rette nell'altro; a figure piane perpendicolari alla retta cardinale nell'uno, figure piane perpendicolari alla cardinale nell'altro, ed inoltre simili e similmente od inversamente poste e coi centri di similitudine nella cardinale. Queste proprietà di parallelismo e somiglianza delle figure conjugate non furono enunciate nel n.° 12, per non premetterle al concetto della retta cardinale.

Dei sei punti cardinali, i primi potrebbero anche dirsi obbiettivi, i secondi iconici (*).

(*) F direbbesi dunque il fuoco obbiettivo o degli oggetti, F^* l'iconico o delle imagini; questi punti non sono conjugati; mentre lo sono E e E^*,

17. Un elemento od in generale una qualsiasi figura obbiettiva dicesi reale, se giaccia entro il mezzo in cui la luce viene allo strumento, cioè nel primo mezzo; virtuale se giace nel secondo, nel terzo,... insomma se fuori del primo mezzo. Similmente, una figura iconica dicesi reale, se cada nell'ultimo mezzo; virtuale nel caso contrario. Quindi, a mo' d'esempio, nell'occhio umano, secondo la figura 9, i due fuochi principali sono reali, cadendo il primo nell'aria dinanzi all'occhio, il secondo nell'umor vitreo (sulla retina), e virtuali sono invece i punti principali ed i nodali. Per una lente biconvessa sono parimenti reali i fuochi, virtuali i punti principali. Per una biconcava virtuali anche i fuochi. I raggi di un pennello lucido incidente si presentano divergenti o convergenti allo strumento, secondochè il centro del pennello o punto luminoso sia reale o virtuale. Le espressioni rette d'incidenza e d'emergenza sembrano opportune per abbracciare insieme i casi della realtà e della virtualità nell'esposizione delle ricerche ottiche, senza incorrere in confusioni od in impropriètà di linguaggio.

18. Le proprietà che abbiamo esposte bastano per risolvere tutte le questioni cardinali; negli altri scritti sono date pei sistemi centrati; nel nostro sono date (e si dimostreranno valevoli) anche pei sistemi non centrati. Applichiamole alla risoluzione di due problemi ottici fondamentali.

Problema. Dati i punti cardinali ed una retta di incidenza, trovare la corrispondente retta d'emergenza.

Siano A, B (fig. 1) le intersezioni della retta d'incidenza coi piani F, E, vale a dire coi primi piani focale e principale (*). La

---

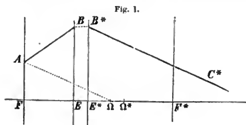
Ω e Ω^*. — Usando queste espressioni (spazio, fuoco degli oggetti, spazio, fuoco delle imagini, figura obbiettiva, figura iconica) la diziono riesce soventi più determinata, sempre più elegante, come può vedersi nell'ultimo lavoro di Möbius. Il vocabolo conjugato sopratutto permette concisione, mentre è il più conforme alla reciprocità. In questo capitolo, e più particolarmente nel quarto, avremo però il dovuto riguardo al linguaggio in uso nella pratica degli strumenti.

(*) Designando P un punto qualunque, con piano P intenderemo sempre il piano condotto per P normalmente alla cardinale.

In generale i punti A, B della fig. 1 non saranno in un medesimo piano con la retta cardinale; o però vogliasi intendere la figura in questo e negli analoghi casi successivi in debito senso convenzionale.

retta d'emergenza, siccome luogo dei punti conjugati di quelli della retta d'incidenza, resterà determinata, trovati che siano i conjugati di due punti di questa retta. Il conjugato di B si trova nell'incontro B^* del piano E^* colla parallela alla retta

Fig. 1.



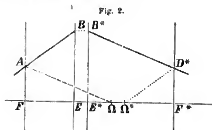
cardinale tirata da B. Il conjugato di A si trova all'infinito nella retta che si cerca; cioè questa sarà parallela a tutte le rette d'emergenza corrispondenti a quelle d'incidenza passanti per A, e quindi in particolare alla emergente che passa per Ω^* e che è parallela alla $A\Omega$.

La costruzione si riduce dunque semplicemente a condurre la retta BB^* parallelamente alla cardinale, indi la B^*C^* parallelamente alla $A\Omega$: e sarà B^*C^* la retta richiesta.

Se invece di A si prendesse in considerazione il pnnto all'infinito nella AB, si rifletterebbe che il suo conjugato giace nel piano F^* ed in tutte le rette di emergenza corrispondenti a rette d'incidenza parallele alla data, e quindi in particolare nella parallela alla data condotta per Ω^*.

La costruzione consisterebbe quindi nel condurre BB^* parallelamente alla cardinale, indi Ω^*D^* (fig. 2) parallelamente alla data: che la richiesta sarebbe B^*D^*.

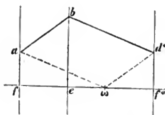
Fig. 2.



Il risultato delle due costruzioni è evidentemente lo stesso.

19. Nel caso di un sistema composto di due soli mezzi, essendo ω (fig. 3) il centro della superficie dividente, ab la porzione del raggio incidente, o della retta che lo contiene, compresa tra il primo piano focale f ed il piano normale all'asse nel vertice ossia centro di figura e della superficie dividente, e bd^* la porzione del raggio rifratto, o della retta che lo contiene, intercetta tra il detto piano e il secondo focale f^*; la relazione tra ab e bd^* può rappresentarsi nella proprietà che $abd^*\omega$ è un parallelogrammo. Nel caso del sistema qualunque l'officio del piano e

Fig. 3.



vien fatto dai due piani principali, l'officio del centro dai due punti nodali, ed il parallelogrammo è surrogato dall'esagono $ABB^*D^*\Omega^*\Omega$ (fig. 2), il quale si otterrebbe dal parallelogrammo $abd^*\omega$ facendo scorrere la metà $bd^*\omega$ di questo in modo che ogni punto percorresse una retta eguale e parallela alla EE^*.

Di qui si vede che, formando un sistema di due mezzi, i quali siano identici agli estremi del sistema dato qualunque, e siano separati da una superficie sferica di raggio $E\Omega$, e collocando tal sistema in modo che il vertice di questa superficie cada in E e il centro in Ω, i raggi rifratti od emergenti da questo sistema coinciderebbero cogli emergenti dal sistema qualunque, ove si facessero scorrere così che ogni loro punto percorresse una retta eguale e parallela alla EE^*.

Nel caso dei mezzi estremi identici, in luogo di una semplice superficie rifrangente, si ha da imaginare posta in E una lente di grossezza trascurabile avente l'egual distanza focale principale del sistema qualunque, restando fermo che i mezzi estremi si estendano sino ad essa, e che i raggi da essa emergenti si facciano scorrere della quantità EE^*.

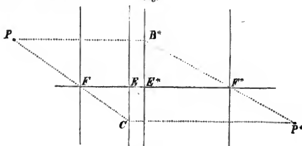
Queste sono le proprietà dei punti principali che Gauss fece notare per le prime.

20. Problema. Dati i punti cardinali, trovare l'imagine di un dato punto luminoso P.

Basta costruire le conjugate di due rette d'incidenza passanti per P. Se P è fuori della retta cardinale, possiamo servirci di due fra le seguenti notevoli rette d'incidenza: la parallela alla cardinale, la passante pel primo fuoco, la passante pel primo punto nodale. Quindi le tre seguenti costruzioni.

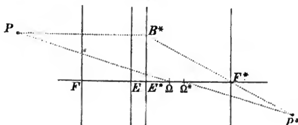
La parallela alla cardinale condotta da P incontri il piano E^* in B^* (fig. 4), la PF incontri il piano E in C, la parallela alla cardinale condotta per C incontri la $B^* F^*$ in P^*: sarà P^* l'imagine domandata.

Fig. 4.



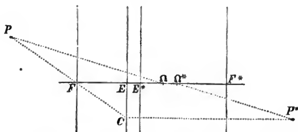
La parallela per P alla cardinale incontri il piano E^* in B^* (fig. 5), la parallela condotta per Ω^* alla $P\Omega$ tagli la $B^* F^*$ in P^*: sarà P^* l'imagine richiesta.

Fig. 5.



La retta PF incontri il piano E in C (fig. 6), la parallela per C alla cardinale tagli la parallela per Ω^* alla $P\Omega$ in P^*: sarà P^* l'imagine di P.

Fig. 6.



Se P fosse nella cardinale, si costruirebbe la conjugata di una retta d'incidenza condotta per P fuori della cardinale: che nell'incontro di questa colla detta conjugata si avrebbe l'imagine P^*.

21. Oltre i punti che abbiamo detto cardinali, altri pure degni di nota esistono per qualunque sistema ottico. Fra questi vogliamo ora considerare i quattro, che designeremo con $\underline{E}, \underline{E}^*$; $\underline{\Omega}$, $\underline{\Omega}^*$, determinati di posto nella retta cardinale dalle equazioni

$$\underline{E}F = FE, \quad E^*F^* = F^*\underline{E}^*,$$

$$\underline{\Omega}F = F\Omega, \quad \Omega^*F^* = F^*\underline{\Omega}^*,$$

ossia dalle condizioni che F sia nel mezzo di $\underline{E}E$ e di $\Omega\underline{\Omega}$, ed F^* nel mezzo di $E^*\underline{E}^*$ e di $\Omega^*\underline{\Omega}^*$.

I punti $\underline{E}, \underline{E}^*$ hanno la proprietà che i piani condotti per essi normalmente alla retta cardinale sono conjugati, e che due loro porzioni conjugate sono eguali ma inversamente poste rispetto alla cardinale.

I punti $\underline{\Omega}, \underline{\Omega}^*$ hanno invece la proprietà che ad ogni retta di incidenza passante per $\underline{\Omega}$ corrisponde una retta d'emergenza passante per $\underline{\Omega}^*$, giacente nel piano di quella e della retta cardinale, e formante con questa lo stesso angolo che quella, ma dalla banda contraria.

22. Il vocabolo *Hauptpunkte* di Gauss non esprime veruna proprietà dei punti E, E^*; nè va esente da questo difetto il vocabolo *Indifferenzpunkte* che il signor Hansen (p. 117 della sua memoria) adotterebbe, se si abbandonasse il primo. Anche l'appellazione di *Knotenpunkte* per Ω, Ω^*, sebbene molto più



commendevole, non è forse la migliore che si possa adottare. A nostro credere si esprimerebbe meglio la precipua proprietà, tanto dei cardinali come degli altri quattro punti (la quale per $E, E^*, \underline{E}, \underline{E}^*$ porta l'eguaglianza delle dimensioni nelle figure conjugate, e per Ω, Ω^*, $\underline{\Omega}$, $\underline{\Omega}^*$ l'eguaglianza degli angoli che le rette conjugate fanno colla cardinale) dicendo che: E, E^* sono i punti d'isometria diretta; $\underline{E}, \underline{E}^*$ i punti d'isometria inversa; Ω, Ω^* i punti d'isogonia diretta; $\underline{\Omega}, \underline{\Omega}^*$ i punti d'isogonia inversa. E punti isometrici, senz'altro, potrebbero dirsi E, E^*, e punti isogonali Ω, Ω^*, qualora, trascurando gli altri, si volesse tenere in considerazione, come finora s'è fatto, soltanto questi quattro.

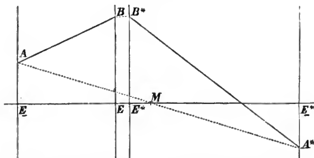
23. Però gli altri meritano, a dir vero, di non essere dimenticati; e noi, per esercizio e per trattenere un po' su essi l'attenzione, indicheremo ancora una costruzione pel primo problema usando dei piani d'isometria, ed una pel secondo usando dei punti d'isogonia; per la qual cosa giova riflettere che due punti conjugati nei piani d'isometria inversa sono sempre in linea retta col punto M di mezzo della $\underline{E}\underline{E}^*$, che è il centro di similitudine per questi piani; e che due rette conjugate condotte per $\underline{\Omega}, \underline{\Omega}^*$ s'incontrano sempre in un punto del piano Γ che taglia normalmente la $\underline{\Omega}\underline{\Omega}^*$ per metà. Con $\underline{E}, \underline{E}^*$ riterremo dato M; con $\underline{\Omega}$, $\underline{\Omega}^*$ dato Γ.

Sia AB (fig. 7) la retta d'incidenza. La retta AM incontri il piano $\underline{E}^*$ in A^*, la parallela BB^* alla cardinale incontri il piano E^* in B^*: sarà $A^* B^*$ la retta d'emergenza.

Sia P (fig. 8) il punto luminoso. La retta $P\Omega$ incontri il piano Γ in A, la parallela $\Omega^* P^*$ alla $P\Omega$ tagli la $A\underline{\Omega}^*$ in P^*: sarà P^* l'imagine di P.

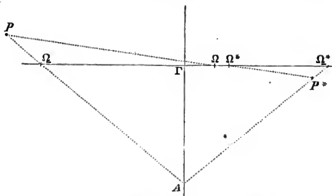
La parte sostenuta in queste costruzioni, ed in altre facilmente imaginabili, dai piani e punti $\underline{E}$, $\underline{E}^*$, $\underline{\Omega}$, $\underline{\Omega}^*$ potrebbe essere so-

Fig. 7.



stenuta da un'altra data coppia qualsiasi di piani conjugati, dei quali fosse pure dato il centro di similitudine, e da qualsiasi

Fig. 8.



coppia di punti della cardinale tra loro conjugati insieme ai quali fosse pure dato il piano in cui s'incontrano le rette con-

jugate passanti per essi. Tutti questi elementi, facilissimi a dedursi, non restano però determinati, senz'altro, in virtù dei dati usuali.

Nel caso in cui i raggi di luce siano in un piano con la retta cardinale, tutti gli elementi da considerarsi sono in esso piano insieme con le costruzioni indicate, che diventano di ancora più facile attuazione. In tal caso ha luogo, per es., il risultato del § 6 del signor NEUMANN, vale a dire che il punto D^* nella nostra fig. 2 può determinarsi colla $F^* D^* = EB - FA$; e giusta la fig. 7 si ottiene, se si vuole, la retta d'emergenza con due aperture di compasso. Degni di nota sono pure i procedimenti usati dal signor REUSCH, e la costruzione dell'imagine indicata da MÖBIUS alla fine dell'ultimo suo lavoro, che vale anche pel caso dei mezzi estremi diversi, e nella quale le rette FF', GG' possono anche tirarsi convergenti tra loro, purchè egualmente inclinate sulla FG, e purchè il nuovo cerchio le tocchi ancora in F', G'.

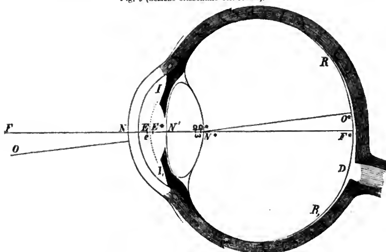
24. Innanzi di terminare la enunciazione in corso vogliamo fermarci a considerare i punti cardinali nell'occhio umano. Ed anzi, dovendo importare assai anche all'ingegnere una cognizione un po' precisa della funzione diottrica dell'occhio, diremo in questo ed in qualche numero successivo tutto ciò che insieme coi punti cardinali stimiamo più necessario per tale cognizione.

Le superficie dividenti i vari mezzi dell'occhio non sono sferiche, benchè ancora sensibilmente di secondo grado e di rotazione. Gli assi di queste superficie di rotazione non possono rigorosamente dirsi coincidenti in una medesima retta. Infine il numero delle superficie dovrebbe rigorosamente riguardarsi come assai grande, constando il cristallino di strati di densità differente, densità maggiore al centro o nucleo che verso l'esterno.

Ma per molti scopi, ed in particolare pel nostro, l'occhio può riguardarsi come un sistema di quattro mezzi (noverando come primo l'aria che gli sta dinanzi) separati da supérficie sferiche coi centri in una medesima retta, che si chiama asse dell'occhio. Nella figura 9, da considerarsi come una sezione meridiana dell'occhio, la retta FF^* rappresenta l'asse; i punti N, N', N^* rappresentano gli incontri dell'asse colle tre superficie dividenti, ossia i vertici di esse superficie; II_1 il diaframma formato dall'iride con apertura circolare centrata sull'asse, che è la pupilla; ed F^* l'incontro dell'asse con la retina RR_1, espansione questa

del nervo ottico destinata a ricevere e trasmettere al cervello le impressioni luminose, e coperta all'esterno dalla coroidea che alla sua volta è ricoperta dalla sclerotica, membrana che circonda e protegge tutto il globo oculare ad eccezione della parte anteriore dov'è la cornea trasparente. La prima superficie N è l'anteriore della cornea e separa l'aria dalla sostanza propria dell'occhio; la seconda N' e l'ultima N^* sono l'anteriore e la posteriore del cristallino, o propriamente della sua capsula. Il mezzo compreso tra N e N' è costituito dalla sostanza della cornea e dall'umor acqueo, che qui si considerano come ottica-

Fig. 9 (Sezione orizzontale dell'occhio).



mente identici, essendo l'indice di quella pochissimo superiore all'indice di questo; il secondo mezzo tra N' e N^* è costituito dal cristallino insieme con la sua capsula; ed il terzo tra N^* e la retina dall'umor vitreo.

La posizione dei punti cardinali nell'occhio varia da un individuo ad un altro, e varia anche in uno stesso individuo quando accomoda l'occhio per esaminare successivamente oggetti posti a distanze differenti. Ciò che si può tenere per quasi certo in un occhio normale che guarda lontano si è che: i due punti

principali giacciono vicinissimi tra loro press'a poco nel mezzo della camera occupata dall'umor acqueo; i nodali pure quindi vicinissimi tra loro e vicinissimi alla faccia posteriore del cristallino; il secondo fuoco sulla retina od a piccola distanza dalla medesima.

Giovando conoscere, almeno approssimativamente, e le posizioni dei punti cardinali nell'occhio e i valori de' varii suoi elementi geometrici e fisici, diamo il seguente quadro, che è quello del così detto occhio schematico del sig. Listing, modificato dal sig. Wüllner, e rappresentato nella fig. 9; rinviando per un esatto apprezzamento del significato da attribuirsi ad esso occhio schematico alle riflessioni che il sig. Listing fa nell'articolo 21 della citata sua *Mathem. Discussion u. s. w*, nel dizionario di Wagner.

Indici di rifrazione.

Per l'aria $= n = 1$
„ l'umor acqueo $= n' = 1{,}3465$
„ il cristallino $= n'' = 1{,}4545$
„ l'umor vitreo $= n^* = 1{,}3465$

Raggi di curvatura.

Per la prima superficie $= r = 7^{mm},8$
„ seconda „ $= r' = 9\ ,51$
„ terza „ $= r^* = -5\ ,87$

Intervalli.

Tra la prima e la seconda superficie 3,78
„ seconda e la terza „ 4,00

Distanze dei punti cardinali dal vertice della prima superficie.

$NF = -12{,}836$
$NE = 1{,}931$
$NE^* = 2{,}328$
$N\Omega = 7{,}047$
$N\Omega^* = 7{,}444$
$NF^* = 22{,}211$

Mediante i punti cardinali così determinati si trova, colle costruzioni già esposte, la retta secondo cui un raggio lucido incidente dovrà penetrare nell'umor vitreo, non che la imagine di un punto lucido qualunque prossimo all'asse dell'occhio. Sebbene già molto semplici, queste costruzioni si possono ancora semplificare, adottando, ogniqualvolta sia lecito, in quelle considerazioni dove non si tratta che della grandezza e posizione delle imagini, la semplificazione suggerita dallo stesso signor LISTING, di surrogare ai due punti principali, che già dicemmo sempre vicinissimi tra loro, un punto solo, e parimenti uno solo ai due nodali. Si ottiene così uno schema dell'occhio, estremamente semplice, che il sig. LISTING chiama occhio ridotto. Nella fig. 9 l'unico punto principale è fissato in e equidistante da E ed E^*, e l'unico punto nodale in ω equidistante da Ω e Ω^*. L'effetto dell'occhio ridotto può anche essere prodotto dal sistema costituito dai soli mezzi estremi, aria ed umor vitreo, resi attigui tra loro ed aventi per dividente la superficie sferica che ha il vertice in e e il centro in ω. Questa superficie è rappresentata nella fig. 9 dalla linea punteggiata.

Se già si sappia che l'imagine dell'oggetto va a formarsi esattamente sulla retina, per determinare la posizione dell'imagine di un punto dell'oggetto, basta che siano dati i punti nodali. Se si ammette la semplificazione dell'occhio ridotto, tirando dal punto luminoso la retta al punto nodale e prolungandola fino ad incontrare la retina, quivi si otterrà l'imagine. Volendo invece considerare i punti nodali distinti, si tirerebbe dal secondo punto nodale la parallela alla retta che dal punto luminoso viene al primo nodale; che nell'incontro di essa parallela colla retina si avrebbe il posto dell'imagine.

Sulla retina vi è un punto che fa nell'occhio lo stesso officio che il crocicchio dei fili in un cannocchiale. Questo punto è al centro della macula lutea, dove si trova la fovea centralis, non nell'asse dell'occhio, ma un po' più verso la tempia. Nella fig. 9 la parte $R_1 I_1$ rappresenta il lato del naso, D il luogo dove il nervo ottico entra nel globo dell'occhio per espandersi a formare la retina, e O^* la fovea centralis, cioè il punto in parola. Quel punto del campo visuale che si esamina direttamente, ossia che si fissa collo sguardo, si dipinge sempre in O^*. In altri ter-

mini, quando si vuol fissare un dato oggetto o punto O, si muove l'occhio, mercè i muscoli suoi proprî o i movimenti della testa (*), finchè l'imagine del punto venga a formarsi in O^*. Questo, nel caso di un unico punto nodale ω, sarebbe come dire che si muove l'occhio finchè la retta $O^*\omega$ passi per O. E nella supposizione più precisa dei due punti nodali distinti, egli è come dire che si muove l'occhio finchè la retta $O^*\Omega^*$ divenga parallela alla ΩO. È dunque sempre la retta congiungente O^* col secondo punto nodale quella che regola la direzione dell'occhio; appunto come è la retta che unisce il crocicchio dei fili col secondo punto nodale (o principale, che per una lente è lo stesso) dell'obbiettivo quella che regola la direzione del cannocchiale.

La retta $O^*\Omega^*$ potrebbesi dire seconda linea visuale mentre direbbesi prima linea visuale la ΩO tirata per Ω parallelamente alla $O^*\Omega^*$. Nell'ipotesi del punto nodale unico, queste due linee si confondono in una. In ogni caso, le due porzioni, che stanno tra il punto fissato e la cornea, e tra la faccia posteriore del cristallino e O^*, appartengono realmente a quel raggio di luce che arriva alla retina in direzione parallela a quella secondo cui viene all'occhio. Il sig. HELMHOLTZ osserva che, credendosi una volta la macula lutea situata all'estremità posteriore dell'asse dell'occhio, si considerava la linea visuale come identica con quest'asse, e la si chiamava quindi indifferentemente asse visuale od asse ottico. Ma le sue

---

(*) Il globo oculare è contenuto in una cavità (orbita) foggiata a piramide quadrangolare col vertice posteriormente; gli spazi che esistono tra il globo e le pareti ossee della cavità sono riempiti da tessuto connettivo molle, contenente molta grassa, in cui giacciono i muscoli, i nervi, i vasi dell'occhio, ecc.; il quale complesso di parti organiche, rimanendo sensibilmente invariabile di volume, non permette all'occhio nè di internarsi nè di uscire dalla cavità orbitale. L'occhio non può neppure spostarsi tutto quanto in altezza o di fianco, opponendovisi gli orli ossei anteriori dell'orbita. Insomma coi sei muscoli, che legando le pareti dell'orbita colla sclerotica servono a muovere l'occhio, non si possono produrre nell'occhio che rotazioni. Il centro di queste rotazioni sembra essere un punto sensibilmente fisso, che giace probabilmente nell'asse dell'occhio, e la cui distanza dal vertice N della cornea sarebbe risultata al sig. HELMHOLTZ (pag. 597) per 19 occhi normali da $13^{mm},02$ a $14^{mm},37$; in media $13^{mm},557$.

ricerche gli hanno mostrato che la linea o le linee visuali differiscono sensibilmente dall'asse, come sta espresso nella fig. 9.

L'occhio non vede distintamente un oggetto, se non quando se ne formi l'imagine sulla retina, e non può quindi vedere nel tempo stesso due oggetti diversamente lontani; poichè, se l'imagine dell'uno si forma sulla retina, quella dell'altro si formerebbe davanti o dietro la medesima. Ma, riguardando gli oggetti l'uno dopo l'altro, riesce a vedere distintamente e a volontà ora l'uno ora l'altro. La modificazione particolare che si produce nello stato dell'occhio per vedere distintamente ora oggetti lontani ora oggetti vicini si dice accomodazione dell'occhio alla distanza dell'oggetto. Come per un cannocchiale, la distanza dell'oggetto, se esso sia già molto lontano, può cambiarsi notevolmente senza che varii sensibilmente il luogo della sua imagine formata dall'occhio. Quando un occhio è accomodato per una distanza infinita, i coni lucidi che gli venissero dai varii punti di un oggetto distante da esso circa 12 metri diverrebbero nell'umor vitreo coni lucidi, non esattamente coi vertici sulla retina, ma seganti la retina in cerchi (cerchi di diffusione) così piccoli da non turbare sensibilmente l'imagine dell'oggetto.

Quando l'occhio si accomoda per oggetti vicini, la pupilla si ristringe, l'orlo pupillare dell'iride e il mezzo della faccia anteriore del cristallino si spostano un po' in avanti, e la curvatura di questa faccia aumenta, aumentando anche, ma assai meno, quella della faccia posteriore, che di posizione resta sensibilmente invariata. La grandezza delle modificazioni osservate nel cristallino sembra sufficiente a produrre i bisognevoli spostamenti dei punti cardinali e quindi a spiegare l'ampiezza dell'accomodazione dell'occhio vivente.

Quest'ampiezza non è illimitata. I limiti delle distanze entro i quali l'occhio può accomodarsi variano assai da un individuo ad un altro. Si dice punctum proximum il più vicino e punctum remotum, o più correttamente remotissimum, il più lontano fra tutti i punti pei quali l'occhio possa accomodarsi perfettamente. I raggi lucidi venienti da un punto più vicino del proximum andrebbero a riunirsi dietro la retina, e però la colpiscono non in un punto, ma in un cerchio.

Per la distanza massima non occorre l'accomodazione, ossia

tale distanza corrisponde allo stato di riposo dell'occhio. Il *puctum remotum* può considerarsi come normalmente situato quando è all'infinito. Il signor Donders dice *emmetropici* (da εμμετρος, *modum tenens*, e ωψ, *oculus*) gli occhi così costituiti. Ma v' hanno occhi (miopi) pei quali l'intervallo dei punti proximum e remotum si accorcia e si avvicina all'occhio; ed altri pei quali l'intervallo si allontana ripiegandosi nel finito negativo, cioè dire il cui punctum remotum compare dietro l'occhio. Il sig. Donders chiama *brachimetropici* i primi, *ipermetropici* i secondi. I primi non possono dunque riunire sulla retina che raggi divergenti; i secondi possono riunire sulla retina non solo i raggi paralleli, ma anche raggi che loro arrivano convergenti.

25. Ritorniamo al sistema diottrico qualunque. Oltre i punti di isometria e d'isogonia e le costruzioni che indicammo od alle quali femmo allusione, altri punti ed altre costruzioni ancora non sono privi d'importanza. La ricerca dei punti meritevoli d'attenzione è oltremodo facile, come dicemmo, per la via di Gauss. Ricorderemo quei punti che in linguaggio geometrico direbbersi *uniti* (detti *sintotici* dal sig. Listing), in ciascun dei quali punto luminoso ed imagine coincidono, dei quali ve ne possono essere due distinti, od uno solo, o nessuno; algebricamente, i tre casi delle radici di un'equazione del secondo grado. Il piano normale alla cardinale in uno di questi punti ha quindi per conjugato sè medesimo, ossia un punto in esso piano ha per imagine un punto del piano stesso.

26. Ricorderemo anche il punto U, intorno al quale capovolgendo lo strumento, la nuova imagine di un punto fisso, pel quale passi la cardinale prima e poi, coincide con la primiera; il qual punto è l'equidistante dai fuochi, e però dista egualmente dai due punti uniti, non che dai due di tutte le seguenti coppie:

$$E,\ \Omega^*;\quad E^*,\ \Omega;\quad \underline{E},\ \underline{\Omega}^*;\quad \underline{\Omega},\ \underline{E}^*;\quad \Gamma,\ M.$$

27. Ma specialmente importa ancora di notare, siccome dotato di proprietà ottiche utilissime nella pratica, l'imagine del vertice della prima superficie del sistema. Il raggio che da un punto luminoso viene a questo vertice può riguardarsi d'ordinario come l'asse del cono lucido emanato da esso punto ed in-

sistente sulla detta superficie; e, per la piccolezza degli angoli, i successivi tratti del cammino di esso raggio possono del pari riguardarsi come assi dei coni lucidi in cui si va trasformando il cono primitivo, non escluso infine il cono emergente. Gli assi di tutti i coni lucidi emergenti dallo strumento saranno dunque sensibilmente percorsi dai raggi che entrano nello strumento pel vertice della sua prima superficie, e quindi si riuniranno, realmente o virtualmente, nel punto imagine di questo vertice. Quando questo punto riesca posteriore all'ultima superficie, tanto che si possa collocarvi il centro della pupilla, collocandovelo, tutti i coni lucidi emergenti investiranno la pupilla concentricamente, ossia l'occhio sarà nella posizione più opportuna per ricevere la maggiore quantità di luce da ciascun oggetto. Questo punto è detto il luogo dell'occhio oppure il punto oculare; e piano oculare è detto il piano contenente la intera imagine della prima superficie. Il contorno di quest'imagine sarà approssimativamente un cerchio per entro il quale verranno a passare, come in un anello, realmente o virtualmente, tutti i raggi di luce ammissibili (vale a dire soddisfacenti le condizioni ammesse per lo stabilimento delle proprietà cardinali) che cadendo sulla prima superficie traversano tutto lo strumento. Per questo motivo Biot, a cui è dovuta un'accurata considerazione delle proprietà di questo luogo, diede al detto cerchio il nome di anello oculare.

L'analogo del punto oculare nello spazio obbiettivo è il punto di cui è imagine il vertice dell'ultima superficie.

28. La teoria delle imagini formate da uno strumento ottico può compendiarsi in due formole che possono servire a calcolare la posizione e la grandezza dell'imagine, date che siano la posizione e la grandezza dell'oggetto, o viceversa. Riferendo la posizione dell'imagine e dell'oggetto ai fuochi si hanno le formole più semplici; ma si hanno ancora formole semplicissime, riferendoli a due punti conjugati qualsiansi. Tutte queste formole conservano la medesima forma dal più semplice ad altro comunque composto sistema ottico. Però, dopo le formole relative ai fuochi, esporremo le relative ai punti principali per far uso delle distanze focali principali.

Siano P e P^* un punto luminoso e la sua imagine, Q e Q^* le loro projezioni sulla cardinale; le due formole, pigliando i

fuochi come punti di riferimento, sono

$$Q^* F^* \cdot FQ = \Phi^* \cdot \Phi, \qquad P^* Q^* : PQ = \Phi : FQ;$$

le due, pigliando i punti principali, sono

$$\frac{\Phi^*}{E^* Q^*} + \frac{\Phi}{QE} = 1, \qquad \frac{P^* Q^*}{P\ Q} = \frac{n\ \cdot E^* Q^*}{n^* \cdot E\ \ Q}.$$

Si noterà che sono le stesse formole che per le lenti dimostrava la diottrica antica, trascurandone le grossezze.

29. Dati due (tre, ecc.) sistemi ottici della natura fin qui considerata, ed essendo l'ultimo mezzo dell'uno identico al primo dell'altro, si può comporne un solo della stessa natura, disponendoli in modo, l'uno di seguito all'altro, che i centri di curvatura delle loro superficie distino pochissimo da una medesima retta. Se si disponessero precisamente in guisa che la cardinale dell'uno cadesse nella retta che contiene la cardinale dell'altro, la cardinale del sistema composto riuscirebbe pure evidentemente in questa medesima retta. Reciprocamente un dato sistema può decomporsi in due (tre, ecc.). Si può attribuire al primo sistema componente soltanto la prima superficie dividente del sistema dato, ovvero le prime due, o le prime tre,...., o tutte meno l'ultima, che resterebbe in tal caso la sola superficie dell'altro sistema componente. Vi hanno formole semplicissime per esprimere le relazioni tra le posizioni dei punti cardinali del sistema composto e quelle dei punti cardinali dei due sistemi componenti, e calcolare quindi, se si vuole, esse posizioni pel sistema composto, date che siano pei sistemi componenti; e noi termineremo la enunciazione delle proprietà cardinali dei sistemi ottici qualunque, presentando cotesté formole.

Indicando i punti cardinali e le distanze focali dei tre sistemi con le lettere già usate, aggiuntovi però l'indice 1 per quelle del primo componente e l'indice 2 per quelle del secondo, e ponendo $D = F_2 F_1^*$; le posizioni dei fuochi principali del sistema composto si trovano colle formole

$$F_1 F = \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_1^*}{D}, \qquad F^* F_2^* = \frac{\Phi_2 \cdot \Phi_2^*}{D}$$

e le distanze focali colle

$$\Phi = \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{D}, \quad \Phi^* = \frac{\Phi_1^* \cdot \Phi_2^*}{D}.$$

Non ci fermeremo a considerare le semplificazioni che nei vari luoghi di questo capitolo porta seco la ipotesi dei mezzi estremi identici, le quali sono troppo evidenti. Bensì è necessario di considerare a parte il caso particolare della telescopia.

CAPITOLO III.

Enunciazione delle proprietà dei sistemi telescopici.

30. Considerando un cannocchiale, o telescopio, usuale, si può dirlo nel suo *stato ordinario* quando sia adattato per emettere paralleli i raggi che riceve paralleli. Imperocchè così appunto li riceve, se vien diretto su un oggetto infinitamente lontano; e così li deve trasmettere per la visione distinta ad un occhio normale disposto per vedere lontanissimo. Perciò, generalizzando, anche di un sistema diottrico a mezzi estremi diversi si dice che è in *condizione telescopica*, o che è un *telescopio*, ogniqualvolta risulti così preparato da emettere paralleli i raggi che riceve paralleli.

I sistemi ottici in condizione telescopica, e in particolare quelli che saranno considerati nel venturo capitolo, hanno grandissima importanza nella pratica; e però vogliamo qui esporne le più essenziali proprietà.

Anche pei sistemi telescopici evvi la retta cardinale; ma evidentemente i punti cardinali sono all'infinito; laonde non è più possibile di trarre da essi alcun profitto. Ma la teorica dei punti cardinali non perde tuttavia d'importanza; potendosi in generale, e nel caso dei cannocchiali a reticolo essendo anzi necessario considerare il sistema telescopico siccome risultante dalla riunione di due sistemi (obbiettivo ed oculare) non telescopici, e fabbricarne la teoria sulla considerazione degli elementi cardinali di essi sistemi componenti.

31. Le proprietà che hanno luogo in un sistema telescopico, ossia le relazioni che per esso vengono stabilite tra gli elementi dello spazio obbiettivo e quelli dell'iconico, si possono compendiare nelle due seguenti.

Il **rapporto tra una dimensione iconica normale alla cardinale e la corrispondente dimensione obbiettiva è costante.** Questa costante nella parte analitica della presente memoria si troverà espressa da $1:l$. Essa suol dirsi l'**ingrandimento lineare** del telescopio. Il segno di l indica se l'imagine sia diritta o capovolta.

Il **rapporto tra una dimensione iconica parallela alla cardinale e la corrispondente dimensione obbiettiva è costante.** Questa costante si troverà espressa da $n^*:n\,l^2$, e potrebbe dirsi, col signor Maxwell, la **elongazione** del telescopio. Se si imagina un punto obbiettivo mobile nella cardinale, lo spazio da esso percorso in un tempo qualunque starà a quello percorso dal conjugato come $nl^2:n^*$; ed il valor positivo di questo rapporto avverte che gli spazi percorsi sono sempre d'egual segno, ossia che i punti si muovono entrambi nel senso della luce, o entrambi nel senso contrario.

La grandezza dell'imagine prodotta da un telescopio dipende, come si vede, soltanto dalla grandezza dell'oggetto, e non anche dalla distanza di questo dal telescopio.

Segue dalle esposte proprietà che due rette conjugate P^*R^*, PR (fig. 10) faranno rispettivamente colle parallele Q^*R^*, QR alla cardinale, ossia colla cardinale stessa, angoli le cui tangenti

Fig. 10.



(che in questa teoria si possono scambiare cogli angoli stessi) avranno tra loro il rapporto costante

$$\frac{P^*Q^*}{Q^*R^*}:\frac{PQ}{QR}=\frac{1}{l}:\frac{n^*}{nl^2}=\frac{n}{n^*}l.$$

Questo rapporto si dice l'**ingrandimento angolare** del telescopio. Due cilindri di raggi lucidi, i quali arrivino allo strumento con una inclinazione tra loro, usciranno dallo strumento ancora come cilindri, ma con un'inclinazione (od angolo) eguale al prodotto di quella di prima per l'ingrandimento.

32. In un sistema che diventi telescopico, uno dei punti uniti va pure all'infinito insieme col punto U (del n. 26); ma l'altro resta nel finito, fintantochè l'elongazione non diventi 1. Taluni chiamano questo il centro del telescopio. Il sig. BRAVAIS, che vi rivolse più specialmente l'attenzione nella *Note de Dioptrique* inserta nel tomo XXXIII (1851) degli *Annales de Chim. et Phys.*, lo direbbe punto confocale del sistema. Indicando con C esso punto, e con Q, Q^* due altri conjugati qualsiansi nella cardinale, evidentemente il rapporto $CQ^*:CQ$ è la costante elongazione dello strumento; proprietà che può anche servire per determinare C. Riferendo a questo punto le figure conjugate avremo ancora un'espressione semplicissima del loro rapporto di posizione, in virtù della seconda proprietà del numero precedente, mentre la prima proprietà dà il rapporto di grandezza. Conservando a P, P^*, Q, Q^* i significati del n.° 28, invece delle formole di quel numero che non potrebbero qui servire, potremo dunque prendere le

$$\frac{CQ^*}{CQ}=\frac{n^*}{nl^2},$$

$$\frac{P^*Q^*}{PQ}=\frac{1}{l},$$

delle quali è ovvia la costruzione. I punti Q, Q^* cadono sempre dalla stessa parte di C, ma i punti P, P^* cadranno o no da una stessa banda della cardinale, secondo che il telescopio dia o no imagini diritte ($l>0$, $l<0$). Per la determinazione di parecchi punti nello stesso piano Q^* giovando servirsi del centro di similitudine S dei piani Q^* e Q, si troverà S colla formola

$$\frac{CS}{QC}=\frac{1}{l},$$

che per la costruzione ha sulla precedente il vantaggio di riferirsi immediatamente al punto C.

33. Per un sistema telescopico la considerazione del punto oculare si potrebbe dire ancora più importante che per un sistema qualunque. Ma ci contentiamo di ritornarvi pei telescopi usuali.

34. Veniamo ora a considerare un telescopio come risultante dalla riunione di due sistemi (obbiettivo ed oculare). Se siano dati i due sistemi componenti, per formarne un sistema unico telescopico, bisognerà disporli l'uno dopo l'altro in modo che il primo fuoco del posteriore coincida col secondo dell'anteriore. O, se sia dato il sistema composto (già telescopico), comunque esso si imagini decomposto in due parti, avrà sempre luogo evidentemente la proprietà, che il primo fuoco della parte posteriore coinciderà col secondo dell'anteriore.

Le formole del n.° 29 perdono in questo caso ogni importanza, esprimendo soltanto la proprietà ora enunciata dell'essere $D=0$. In loro vece daremo quelle che, per mezzo degli elementi cardinali dei due sistemi componenti, esprimono la elongazione e gli ingrandimenti lineare ed angolare del telescopio.

$$\text{Elongazione} = \frac{\Phi_2 \cdot \Phi_2^*}{\Phi_1 \cdot \Phi_1^*}.$$

$$\text{Ingrandimento lineare} = -\frac{\Phi_2}{\Phi_1^*}.$$

$$\text{Ingrandimento angolare} = -\frac{\Phi_1}{\Phi_2^*}.$$

Volendo anche determinare il centro C per mezzo dei fuochi dei sistemi componenti, basta riflettere che F_1, F^*_2 sono tra loro conjugati rispetto al telescopio, e che perciò il rapporto CF^*_2: CF_1 dev'essere eguale all'elongazione.

CAPITOLO IV.

Enunciazione delle proprietà cardinali dei telescopi in uso.

35. Per cannocchiale tutti intendono un sistema di lenti sferiche disposte coi centri di curvatura possibilmente in una retta, asse di uno o più tubi che tengono insieme unite le lenti. Per telescopio noi vogliamo qui intendere un cannocchiale adattato per emettere paralleli i raggi che riceve paralleli. I mezzi estremi sono identici tra loro ed a quelli compresi tra lente e lente, siccome tutti porzioni dell'aria. Per rendere questo capitolo affatto intelligibile a chiunque, tralasciamo il concetto della retta cardinale, cioè riteniamo il sistema come esattamente centrato, e ci serviamo delle parole maggiormente in uso tra i pratici.

36. Per ogni punto od oggetto semplice luminoso il telescopio fornisce un punto imagine; per ogni sistema di punti luminosi od oggetto (composto) un sistema di punti costituenti la imagine (composta) di esso oggetto. D'ordinario come oggetti si considerano figure piane perpendicolari all'asse centrale. Ma qui vogliamo anche considerare oggetti o sistemi di punti a tre dimensioni. La retta compresa fra due punti di tale sistema può dirsi una dimensione dell'oggetto, e per corrispondente dimensione dell'imagine deve pur sempre intendersi la retta compresa fra le imagini di quei due punti. Così v'è luogo a considerare dimensioni e normali ed oblique e parallele all'asse centrale. Ciò premesso, le proprietà caratteristiche dei telescopi in uso si possono compendiare nelle due seguenti.

Una dimensione normale all'asse centrale nell'imagine sta alla corrispondente dimensione dell'oggetto in rapporto costante. Questo rapporto dicesi l'in-

grandimento lineare del telescopio. Nella seconda sezione di quest'opuscolo si troverà espresso da $1:l$, ed il segno di l indicherà se l'imagine sia diritta o capovolta.

Una dimensione parallela all'asse centrale nell'imagine sta alla corrispondente dimensione dell'oggetto in rapporto costante, eguale al quadrato del rapporto precedente. Questo quadrato potrebbe chiamarsi l'*elongazione* del telescopio.

La grandezza dell'imagine prodotta da un telescopio dipende dunque soltanto dalla grandezza, e non anche dalla distanza, dell'oggetto.

A viemeglio fissare nella mente queste proprietà vogliamo anche enunciarle in termini di moto. Imaginando che un punto luminoso pigli a muoversi, restando fermo lo strumento, si muoverà corrispondentemente anche l'imagine; e le dette proprietà possono enunciarsi come segue: *Il rapporto tra la velocità dell'imagine e quella dell'oggetto dipende soltanto dalla direzione del moto rispetto all'asse centrale; e per la direzione parallela all'asse è il quadrato di quello che corrisponde a direzione normale all'asse.* Il valore positivo di questo rapporto, per quando il moto si fa parallelamente all'asse, avverte che i due punti si muovono in tal caso sempre in un medesimo senso, o tutti due in quello stesso della luce, o tutti due nel contrario.

37. Dire che un telescopio emette paralleli i raggi che riceve paralleli è quanto dire che la direzione del raggio emergente da un telescopio dipende solo dalla direzione, non dalla posizione, dell'incidente.

In questa teoria, per la supposta loro piccolezza, gli angoli che i raggi di luce fanno tra essi e coll'asse si possono scambiare colle rispettive tangenti. Ora, se si riflette che la tangente dell'angolo del raggio, incidente od emergente, coll'asse equivale al rapporto tra una dimensione, di un oggetto o della sua imagine, normale ed una dimensione parallela all'asse; per le due esposte proprietà si fa manifesto che *l'angolo compreso tra il raggio emergente e l'asse sta al compreso tra il raggio incidente e l'asse in rapporto costante, e precisamente reciproco dell'ingrandimento lineare.* Questo rapporto tra gli angoli si dice l'*ingrandimento angolare* oppure, senz'altro, l'*ingrandimento* del telescopio.

Nella seconda sezione comparirà espresso dal coefficiente l; motivo per cui questo coefficiente è denominato l'ingrandimento dagli autori che considerano solo il caso dei telescopi a mezzi estremi identici.

Nell'ordinario uso del telescopio, cioè quando se ne volga agli oggetti la estremità obbiettiva, l'angolare è un vero ingrandimento, siccome maggiore dell'unità, mentre il lineare è un impiccolimento.

Vogliamo considerare distesamente il concetto dell'ingrandimento. Quando si dirige l'occhio ad un oggetto, si giudica della grandezza sua, o precisamente (lasciando ora in disparte la dimensione parallela all'asse, profondità) della grandezza delle sue dimensioni normali all'asse dell'occhio (larghezza e altezza dell'oggetto) dalla grandezza delle corrispondenti dimensioni dell'imagine sulla retina. Per verità, si tien conto anche di altri elementi; ma non è questo il luogo di trattare dei medesimi. Sia dunque la retta ab una dimensione dell'oggetto normale all'asse dell'occhio. La imagine $a^* b^*$ di questa retta sulla retina si potrebbe determinare geometricamente tirando dal punto Ω^* dell'occhio le parallele $\Omega^* a^*$, $\Omega^* b^*$ alle rette $a\Omega$, $b\Omega$. La grandezza di questa imagine dipende dall'angolo $a^* \Omega^* b^*$, e sarebbe esattamente proporzionale a quest'angolo, se l'accomodazione non alterasse affatto la distanza del punto Ω^* dalla retina, e questa fosse esattamente sferica col centro in Ω^*. La misura di quest'angolo si suol riguardare come misura dell'imagine o della grandezza apparente dell'oggetto ab a cui si riferisce. Quest'angolo sarebbe opposto al vertice nel caso di un solo punto nodale, ed in ogni caso è eguale all'angolo $a\Omega b$ formato dalle rette che vanno dall'occhio (da Ω) ai punti estremi a, b dell'oggetto ab. Quindi si suol dire che la grandezza apparente di un oggetto è misurata dall'angolo sotto cui l'oggetto appare.

Imaginiamo ora che si osservi con un telescopio un oggetto lontanissimo, e diciamo ancora ab una dimensione dell'oggetto normale alla direzione del telescopio. Tutti i raggi lucidi venienti da a all'obbiettivo del telescopio saranno sensibilmente paralleli tra loro e costituiranno un cilindro lucido incidente, che diremo α, il quale nell'interno del telescopio si convertirà successivamente in pennelli, ma ne uscirà dall'oculare in forma

ancora di un cilindro lucido, che designeremo con α^*. I raggi uscenti da b formeranno similmente un cilindro incidente β ed un emergente β^*. Imaginiamo dietro l'oculare l'occhio di un osservatore, disposto per concentrare sulla retina i raggi paralleli. I cilindri lucidi α^*, β^* entrando in quest'occhio penetreranno nell'umor vitreo in forma di pennelli convergenti, l'uno ad un punto A^*, l'altro ad altro punto B^* della retina. Fra i raggi di α^* e β^* quei due, i cui prolungamenti passano per Ω, penetreranno nell'umor vitreo come se venissero da Ω^* e colle direzioni stesse rispettive di α^*, β^*. Laonde, geometricamente si potrebbe determinare l'imagine $A^* B^*$ sulla retina, tirando da Ω^* le rette $\Omega^* A^*$, $\Omega^* B^*$ parallele ai cilindri α^*, β^*. L'angolo $A^* \Omega^* B^*$ è quello che misura la grandezza apparente dell'oggetto ab guardato col telescopio. Il che è come dire che l'oggetto, in virtù del telescopio, parrà all'osservatore tanto grande quanto gli parrebbe senza telescopio, qualora esso oggetto si ingrandisse tanto da sottendere in Ω non già l'angolo $a \Omega b$, ma l'angolo $A \Omega B$ eguale all'$A^* \Omega^* B^*$ dei due cilindri α^*, β^*, ossia tanto che i cilindri lucidi uscenti dai suoi nuovi punti estremi A, B cadessero sull'occhio nelle direzioni tenute da α^*, β^*.

Senza il telescopio, la grandezza apparente dell'oggetto ab sarebbe misurata, come abbiamo già detto, dall'angolo $a \Omega b$. Ma questo angolo va riguardato come eguale al compreso tra i cilindri α e β; ed a suo vertice si può anche pensare, se si vuole, invece di Ω, indifferentemente il vertice della faccia obbiettiva del telescopio (supposto ancora dinanzi all'occhio) o qualsiasi altro punto del telescopio o dell'occhio; giacchè tutti questi punti distano da Ω infinitamente poco in confronto dell'oggetto. E però: Il rapporto tra la grandezza apparente dell'oggetto guardato col telescopio e quella dell'oggetto guardato ad occhio nudo è eguale al rapporto tra l'angolo formato da due cilindri o raggi lucidi emergenti dal telescopio e l'angolo formato dai corrispondenti raggi incidenti. Questo rapporto è l'ingrandimento angolare, e di qui si vede il perchè venga esso d'ordinario chiamato semplicemente l'ingrandimento oppure l'amplificazione del telescopio.

38. I telescopi in uso risultano delle due parti, aventi offi-

cio ben distinto, che si dicono l'obbiettiva e l'oculare. La decomposiziono di un telescopio, se ancho sia, come quelli in uso, composto di lenti, teoricamente potrebbe anche imaginarsi fatta in guisa che le due parti componenti non risultassero a mezzi estremi identici; ma una siffatta decomposizione qui non dev'esser imaginata; l'obbiettivo e l'oculare saranno quindi due sistemi a mezzi estremi identici, e propriamente due sistemi di lenti, per ciascun dei quali non v'è luogo a considerare che una sola (due eguali) distanza focale principale, cho designeremo con Φ per l'obbiettivo e φ per l'oculare.

Del resto, comunque si volesse imaginare decomposto un telescopio, qualunque fosse cioè il numero delle superficie dividenti che si volessero attribuire all'una parte; sempre il secondo fuoco principale della parte anteriore od obbiettiva coinciderebbe col primo della posteriore. E reciprocamente, con due sistemi dati volendosi comporre un sistema telescopico, bisogna regolare la distanza dell'uno dietro l'altro in guisa che il primo fuoco del posteriore coincida col secondo dell'anteriore.

Le formole del n. 29 non prestano nel presente caso verun servigio, essendo zero D, ossia all'infinito i punti cardinali. In loro vece noteremo la formola

$$\text{Ingrandimento} = -\frac{\Phi}{\varphi}$$

che dice essere l'ingrandimento del telescopio eguale (e contrario, per il segno) al rapporto tra le distanze focali dell'obbiettivo e dell'oculare, ed alla quale si possono accoppiare le segnenti

$$\text{Ingrand. lineare} = -\frac{\varphi}{\Phi}$$

$$\text{Elongazione} = \left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^2.$$

39. La formola esposta non può servire alla determinazione dell'ingrandimento se non siano note le distanze Φ e φ. Importa di poter trovare l'ingrandimento di un dato telescopio senza conoscere nè questi, nè altri elementi del telescopio o delle sue parti, senza affatto conoscere insomma la sua interna costitu-

zione, e senza decomporlo; ma misurando soltanto gli effetti che il telescopio può produrre. Diamo un cenno dei metodi impiegati a tal fine, avvertendo che si applicano colle debite considerazioni anche agli strumenti che non sono in condizione telescopica.

Se si misura normalmente all'asse una dimensione di un oggetto e la corrispondente dimensione dell'imagine, nel rapporto di quella a questa, si ottiene l'ingrandimento del telescopio. Se si misura l'angolo di due cilindri lucidi incidenti e l'angolo dei corrispondenti cilindri emergenti, il rapporto di questo a quello dà pure l'ingrandimento.

La determinazione dell'ingrandimento mediante il confronto delle dimensioni si può dire, in sostanza, praticata in una sola maniera, la quale può intitolarsi di Ramsden, Dollond e Lagrange. Considerando come oggetto radiante la prima faccia (faccia obbiettiva) del telescopio, Ramsden e Dollond idearono strumenti opportuni, che dissero dinametri (da δύναμις forza, ingranditiva, e μέτρον misura), per misurare con molta esattezza il diametro dell'imagine di essa faccia, ossia il diametro dell'anello oculare (n. 27), anche se cada nell'interno del telescopio.

Lagrange prese invece in considerazione i diametri di un cilindro lucido prima di entrare e dopo uscito dallo strumento. La sua memoria *Sur une loi générale d'Optique*, letta alla R. Accademia delle scienze di Berlino nel 1803, ha precisamente per iscopo di raccomandare all'attenzione degli ottici il seguente teorema, che qui enunciamo, avuto riguardo soltanto ai telescopi. Qualunque sia il numero, la disposizione e la forza delle lenti (e degli specchi) di un sistema, se un cilindro lucido parallelo all'asse centrale investa tutta l'obbiettiva e, non impedito dai tubi o da diaframmi, esca tutto quanto per l'oculare, il diametro suo dopo l'uscita starà nel diametro suo all'entrata (apertura dell'obbiettiva) tante volte quant'è l'ingrandimento. Questo teorema è contenuto nella prima delle proprietà del n. 36. Il metodo di misurare l'ingrandimento suggerito da Lagrange in base a questo teorema non differirebbe praticamente da quello di Ramsden e di Dollond, se non in quanto permetterebbe di misurare il diametro della

sezione della luce emergente dallo strumento in prossimità arbitraria dell'oculare, anzichè precisamente nel piano oculare. Ma se si riceve sull'obbiettiva non precisamente un cilindro lucido, bensì tutta la luce che vi cade naturalmente volgendola ad una regione illuminata, allora non si ha all'emergenza un cilindro lucido; e bisogna cercare, giusta la maniera di RAMSDEN e di DOLLOND, la minima sezione, cioè quella dove tutti i raggi che traversano lo strumento, nelle condizioni della nostra approssimazione, vanno a formare la imagine della faccia obbiettiva.

Maggior varietà presentano i metodi di determinare l'ingrandimento col confronto degli angoli. Possiamo però ridurli a tre veramente distinti, considerando gli altri come modificazioni di questi, più o meno opportune a seconda delle circostanze.

Il più antico è quello di GALILEO, consistente nel dirigere il telescopio su di un piano diviso in parti eguali, per esempio su di un tetto considerandone le tegole come le parti eguali, e con un occhio guardare il tetto liberamente e coll'altro guardarlo a traverso del telescopio. Numerando quante tegole nell'occhio nudo occupino la estensione di (coprano) una tegola ingrandita nell'occhio armato, in esso numero si ha l'ingrandimento.

La primitiva semplicità di questo metodo, che per moderati ingrandimenti può tornare opportunissimo, venne in seguito modificata nello scopo di renderlo più preciso, e particolarmente di purgarlo del difetto del dover osservare, ed egualmente bene, con entrambi gli occhi. Una modificazione in questo senso è descritta da POUILLET nei suoi *Éléments de Physique* (pag. 262, tom. II, 7ª ediz.) e riportata da BIOT nell'*Astron. phys.* (pag. 471, tom. I). Giova prendere per oggetto una mira a parti eguali bianche e nere; e se si numera quante parti non ingrandite corrispondano non ad una sola, ma ad un certo numero delle ingrandite, si potrà anche avere nel rapporto dei due numeri un valore più esatto per l'ingrandimento. Ad ogni modo però non è questo il metodo conveniente pei forti ingrandimenti.

Con questo metodo si misura l'angolo maggiore, cioè quello dei cilindri lucidi emergenti, ossia quello sotteso al punto Ω^* dell'occhio dall'imagine ingrandita, mediante l'altro angolo, cioè quello sotteso dall'imagine non ingrandita; poichè si numera nell'occhio quante volte questo sta in quello.

Affine a questo metodo, per la parte che ancora vi ha l'occhio, è l'altro di misurare le due distanze diverse alle quali bisogna far collocare due oggetti eguali, affinchè, osservandone il più lontano col telescopio e l'altro ad occhio nudo, si vedano egualmente grandi. L'ingrandimento in tal caso è dato dal rapporto delle due distanze.

Ma i metodi che danno l'ingrandimento, comunque forte, con grandissima precisione, e che però stanno molto al disopra di tutti gli accennati, sono quelli di GAUSS e del sig. PORRO; il primo tuttora poco divulgato, il secondo poi non affatto, almeno per quanto ci consti.

GAUSS descrive il proprio metodo a pag. 375 del II tomo (1824) delle *Astronomische Nachrichten* press'a poco colle parole che qui in parte riferiamo. Volgendo per la sua estremità oculare il telescopio ad un oggetto, questo appare impiccolito tante volte quante il telescopio nel suo uso ordinario ingrandisce, e così distinto da sopportare un ingrandimento per mezzo di un secondo cannocchiale. Si potrà dunque misurare mediante un teodolite con ripetizione l'angolo tra due oggetti visti coll'intermezzo del telescopio capovolto e confrontarlo con l'angolo formato al vertice dell'oculare del telescopio dalle rette che vanno agli oggetti.

Il metodo del sig. PORRO è ancora preferibile a quello di GAUSS. Il sig. PORRO misura non l'angolo (che è l'impiccolito) dei cilindri lucidi uscenti dall'obbiettivo, ma l'angolo (l'ingrandito) dei cilindri uscenti dall'oculare, e però può servirsi di un goniometro più alla buona. Si imagini collocato rimpetto all'oculare del telescopio, ridotto coll'asse orizzontale, l'obbiettiva di un cannocchialetto accomodato telescopicamente, il quale possa girare intorno alla verticale che passa pel centro di un circolo orizzontale graduato. Denotiamo, come nel n.° 37, con α^*, β^* i cilindri lucidi emergenti che provengono dai punti radianti a, b. Si giri il cannocchialetto sino a ridurre il crocicchio de' suoi fili a coincidere coll'imagine di a, o, ciò ch'è lo stesso, sino a che la sua linea di collimazione diventi parallela al cilindro α^*, ed in questo stato si faccia la lettura al circolo graduato. Ciò fatto, si giri nuovamente il cannocchialetto finchè il suo crocicchio venga a coincidere coll'imagine di b e si legga nuovamente il circolo. La differenza delle due letture dà l'angolo tra

le due direzioni del cannocchialetto, ossia l'angolo compreso tra α^* e β^*; il quale diviso per quello compreso tra α e β, ossia tra le rette che dal vertice dell'obbiettiva vanno ai due oggetti a e b, darà l'ingrandimento.

Sembrandoci che la collimazione dei fili di un cannocchiale per mezzo di un altro non si soglia praticare se non che guardando con questo nell'obbiettiva di quello, non stimiamo superfluo l'aggiungere, che, quando il reticolo del telescopio contenga fili dei quali si conosca la distanza angolare, collimando successivamente questi fili dalla parte dell'oculare, si otterrà l'ingrandimento, giusta il metodo del sig. PORRO, nel rapporto dell'angolo descritto dal cannocchialetto all'angolo dei fili del telescopio; il che molto contribuisce, com'è chiaro, al valor del metodo.

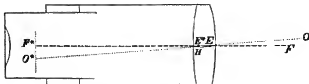
40. La proprietà dei punti nodali, coincidenti nel nostro caso coi principali, permette di riconoscere con tutta semplicità, nella corrente supposizione di un solo sistema di punti cardinali, qual sia a rigore la retta che in un cannocchiale a fili devasi chiamare linea di collimazione. Per collimare un punto O si rota il cannocchiale finchè l'imagine di O somministrata dall'obbiettivo venga a coincidere col crocicchio O^* dei fili, che già supponiamo alla distanza focale dall'obbiettivo. Ora, la proprietà, che s'accompagna con questo fenomeno di coincidenza, è che la retta O^*E^* riesce parallela alla EO. Se il crocicchio fosse nell'asse centrale dell'obbiettivo, la retta O^*E^* coinciderebbe esattamente colla EO, e quindi prolungata passerebbe pel punto collimato (*). Nella pratica si cerca bensì, d'ordinario, di ridurre il crocicchio in quest'asse, ma non si deve pensare di avervelo ridotto esattamente; ad ogni modo bisogna considerare il caso in cui non lo sia. La retta O^*E^* non riesce allora coincidente colla EO; ma siccome corre parallelamente a questa e ne dista estremamente poco; così, di regola, la sua direzione non differisce sensibilmente da quella che dovrebbe avere per passare rigorosamente per O (**).

(*) Astrazion fatta, già s' intende, dalla rifrazione che la luce subisce traversando l'atmosfera dall' oggetto al cannocchiale.

(**) Nella realtà l'oggetto a cui si mira non può essere un punto matematico, bensì un oggetto fisico a dimensioni ben maggiori della di-

La distanza tra O^*E^* ed EO, rappresentata da EH nella fig. 11 (figura da non credersi fatta in scala, e dove H s'in-

Fig. 11.



tende nel prolungamento di OE), come cateto del triangolo EHE^* rettangolo in H, è il prodotto dell'intervallo EE^* pel seno dell'angolo che la retta O^*E^* fa coll'asse centrale F^*F dell'obbiettivo. Nelle circostanze ordinarie entrambi questi fattori, intervallo ed angolo, sono piccolissimi, ed estremamente piccola quindi risulta la distanza EH.

La retta O^*E^*, siccome determinata dal crocicchio dei fili e dal secondo punto principale dell'obbiettivo, è una retta fissa relativamente alle pareti solide del cannone del cannocchiale, almeno finchè non si sposti il reticolo e non si smuova l'obbiettivo; e perciò si potrà avere l'angolo che essa descrive nel passaggio da una ad altra collimazione misurando l'angolo di cui rota il cannone rispetto ad altre parti materiali che restino immobili durante tal passaggio.

Come nel caso dell'occhio (n. 24), così in questo possiamo dire che la collimazione di un dato punto si attua girando il cannocchiale sinchè la retta O^*E^* passi sensibilmente per il punto, o detto rigorosamente, sinchè la retta O^*E^* diventi parallela a quella che da E va al punto. Questo parallelismo resta attuato, nel caso dell'occhio quando l'imagine del punto cade nella fovea centralis, nel caso presente quando l'imagine cade nel crocicchio dei fili. La O^*E^* potrebbe dirsi per un cannocchiale, come già per un occhio, la (seconda, interna) linea visuale; ma con parola più particolarmente usata per un cannocchiale si dirà linea di collimazione.

---

stanza fra le dette parallele. E però la retta O^*E^* incontrerà realmente l'oggetto esteso che si prenderà di mira, ma non rigorosamente nel punto dove lo incontrerà la parallela ad essa uscente da E.

Questa denominazione e anche queste altre, pure adoperate, linea di fiducia, direttrice della visuale, sono preferibili a quella di asse ottico che può dar luogo a confusioni. In un cannocchiale si possono considerare parecchie rette, e principalmente vanno considerate le tre seguenti: linea di collimazione, asse centrale dell'obbiettivo, asse meccanico del cannone. D'ordinario queste tre rette si vorrebbero far coincidere in una; ma non avendo luogo siffatta coincidenza, importa di ben distinguere l'una dalle altre. Una tale distinzione è troppo negletta in molti trattati di topografia; e nella denominazione di asse ottico sono abbracciato confusamente insieme tutte e tre queste rette. Per l'uso troppo esteso e mal determinato che si fa di questa denominazione ci pare conveniente di evitarla. Perciò abbiamo sempre chiamato asse centrale la retta dei centri di uno strumento ottico, o chiameremo sempre linea di collimazione, o di fiducia, o visuale, quella che determina, come abbiamo visto, la direzione di un cannocchiale. In qualche libro abbiamo trovato questa linea definita persino siccome quella che passa per il centro dell'oculare e l'intersezione dei fili. L'oculare non influisce nella linea di collimazione di un cannocchiale astronomico se non per mezzo del proprio tubo, in quanto che il reticolo vien trasportato mediante il tubo oculare alla distanza dell'obbiettivo conjugata di quella dell'oggetto; il qual trasporto altera la direzione della linea di collimazione sempre quando il crocicchio non si muova esattamente in una retta passante per il secondo punto principale dell'obbiettivo. Solamente nel caso che sia di Huyghens l'oculare concorre con una lente (il collettivo) alla determinazione della linea di collimazione; giacchè in tal caso vanno presi per punti E e E^*, di testè, quelli del sistema risultante dall'obbiettivo insieme col collettivo. A sradicare gli errori insinuati da così false definizioni giova sopratutto il riflettere che l'oculare fa semplicemente l'officio di microscopio per vedere i fili e l'imagine dell'oggetto prodotta dall'obbiettivo; laonde potrebbesi per questo officio, a mo' di dire, usarlo anche a mano staccato dal cannocchiale, che resterebbe soltanto formato dall'obbiettivo e dal reticolo tenuti insieme dal cannone.

SEZIONE II.

TEORIA ANALITICA DELLE PROPRIETÀ CARDINALI.

CAPITOLO I.

Determinazione dei parametri d'emergenza in funzione di quelli d'incidenza.

41. Imagineremo determinata la posizione di ciascun punto da considerarsi in questa ricerca mediante coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, prendendo come asse delle x la retta, od una parallela alla retta, dalla quale nel problema generale (n. 42) ammetteremo che pochissimo distino tutti i centri di curvatura, e come direzione positiva di esse x quella secondo cui supponiamo che la luce si propaghi. L'origine delle coordinate e le direzioni degli assi laterali, cioè delle y, z, s'imaginino fissate come si vuole.

Consideriamo in primo luogo l'effetto di una sola rifrazione. Siano: n, n' inversamente proporzionali alle velocità della luce (giusta la teorica delle ondulazioni) nel primo e nel secondo mezzo; M il centro della superficie sferica dividente questi mezzi; N il punto della medesima in cui termina il raggio condotto da M parallelamente all'asse delle x; N, p, q le x, y, z del punto N; ed r l'eccesso della x di M su quella di N, ossia il raggio della sfera, tenuto come positivo se questa volga la convessità alla banda d'onde viene la luce, come negativo nel caso contrario.

Siano

$$y-p=\frac{\beta}{n}(x-N)+b,\quad z-q=\frac{\gamma}{n}(x-N)+c$$

le equazioni della retta secondo la quale il raggio di luce arriva alla superficie dividente, e

$$y-p=\frac{\beta'}{n'}(x-N)+b', \quad z-q=\frac{\gamma'}{n'}(x-N)+c'$$

quelle della retta secondo cui il medesimo raggio si propaga nel secondo mezzo. Dobbiamo trovare come dipendano β', γ', b', c' da β, γ, b, c. Chiamando P il punto d'incidenza e θ l'angolo acuto tra l'asse delle x ed MP, la x di P è

$$N+r(1-\cos\theta),$$

e, poichè P appartiene ad entrambe le rette, si avrà

$$\frac{\beta r}{n}(1-\cos\theta)+b=\frac{\beta' r}{n'}(1-\cos\theta)+b'.$$

Di qui, ritenute come infinitamente piccole di prim'ordine le quantità β, β' e θ, trascurando le quantità di terz'ordine, si ottiene

$$b'=b. \tag{1}$$

E similmente

$$c'=c. \tag{1}$$

Imaginiamo il piano perpendicolare in M all'asse delle x, e siano Q, Q' i punti dov'esso è incontrato dalle due rette. Poichè PQ, PQ', PM sono in un medesimo piano, i punti Q, Q', M saranno in una medesima retta, e quindi le differenze tra le y di Q', Q e quella di M, che è p, non che le differenze analoghe tra le z, staranno fra loro come MQ' a MQ; ossia sussisteranno le equazioni

$$\frac{\beta' r}{n'}+b'=\frac{MQ'}{MQ}\left(\frac{\beta r}{n}+b\right), \quad \frac{\gamma' r}{n'}+c'=\frac{MQ'}{MQ}\left(\frac{\gamma r}{n}+c\right).$$

Ora dai triangoli MPQ', MPQ si hanno le proporzioni

$$\frac{MQ'}{MP}=\frac{\operatorname{sen} MPQ'}{\operatorname{sen} MQ'P}, \quad \frac{MQ}{MP}=\frac{\operatorname{sen} MPQ}{\operatorname{sen} MQP},$$

dalle quali, se si indica con λ e λ' gli angoli MQP e $MQ'P$, e

si riflette che gli angoli MPQ e MPQ', essendo quelli d'incidenza e rifrazione, hanno i seni nel rapporto di n' a n, si ottiene

$$\frac{MQ'}{MQ}=\frac{n \operatorname{sen}\lambda}{n' \operatorname{sen}\lambda'}.$$

Sostituendo questa espressione nelle due equazioni precedenti, e risolvendole rispetto a β', γ', si ha

$$\beta'=\frac{nb+\beta r}{r}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\lambda'}-\frac{n'b'}{r},\quad \gamma'=\frac{nc+\gamma r}{r}\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\operatorname{sen}\lambda'}-\frac{n'c'}{r}.$$

Queste espressioni di β' e γ' sono rigorosamente esatte; ma, poichè λ e λ' differiscono dall'angolo retto di quantità del prim'ordine, e quindi sen λ e sen λ' differiscono dall'unità di quantità del second'ordine, le medesime espressioni, trascurandovi le quantità del terz'ordine, diverranno

$$\beta'=\beta+\frac{n-n'}{r}b,\quad \gamma'=\gamma+\frac{n-n'}{r}c. \qquad (2)$$

Le equazioni (1), (2) determinano i parametri β', γ', b', c' in funzione di β, γ, b, c, come si voleva.

Possiamo osservare che le stesse formole sono immediatamente applicabili anche al caso della riflessione, ponendo $-n$ in luogo di n'; e che per tal modo anche tutte le successive ricerche si possono estendere al caso in cui invece di una o più rifrazioni avvengano delle riflessioni.

42. Per la risoluzione del problema generale, di determinare cioè il cammino del raggio di luce dopo un numero $(\mu+1)$ qualunque di rifrazioni, significhino:

$$M,\qquad M'\ldots\qquad \ldots M^{(\mu)}$$

i centri di curvatura delle superficie sferiche rifrangenti, ed anche le x di essi centri;

$$N,\qquad N'\ldots\qquad \ldots N^{(\mu)}$$

i punti delle dette superficie dove terminano rispettivamente i loro raggi paralleli all'asse delle x, non che le x di essi punti;

$$p,\ q,\qquad p',\ q'\ldots\qquad \ldots p^{(\mu)},\ q^{(\mu)}$$

le coordinate laterali, ossia le y, z dei punti M, M',..., N, N',...;

$$r = M - N, \qquad r' = M' - N' \ldots \quad \ldots r^{(\mu)} = M^{(\mu)} - N^{(\mu)}$$

i raggi delle superficie medesime, come sta scritto, positivi, se queste volgano la convessità alla banda d'onde viene la luce;

$$n, \qquad n', \qquad n'' \ldots \qquad \ldots n^{(\mu+1)}$$

numeri inversamente proporzionali alle velocità della luce (giusta la teorica delle ondulazioni) nei successivi mezzi.

Finalmente poniamo

$$u = \frac{n - n'}{r}, \qquad u' = \frac{n' - n''}{r'}, \ldots \qquad \ldots u^{(\mu)} = \frac{n^{(\mu)} - n^{(\mu+1)}}{r^{(\mu)}},$$

$$t' = \frac{N' - N}{n'}, \ldots \qquad \ldots t^{(\mu)} = \frac{N^{(\mu)} - N^{(\mu-1)}}{n^{(\mu)}}.$$

Queste quantità u, t, formate, come si vede, cogli elementi geometrici e fisici del sistema, sono i coefficenti nelle relazioni che stiamo per esporre tra i parametri delle successive porzioni della spezzata percorsa dal raggio di luce.

Sieno ora

$$\left.\begin{aligned} y - p &= \frac{\beta}{n}(x - N) + b \\ z - q &= \frac{\gamma}{n}(x - N) + c, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

le equazioni della retta d'incidenza; giusta il n. precedente saranno

$$z - p = \frac{\beta'}{n'}(x - N) + b, \qquad \beta' = \beta + ub,$$

dove

$$z - q = \frac{\gamma'}{n'}(x - N) + c, \qquad \gamma' = \gamma + uc,$$

le equazioni del cammino del raggio di luce nel secondo mezzo. Per applicare immediatamente le formole del n. precedente ad ogni successiva rifrazione, giova riferire ogni volta il cammino del raggio di luce al punto $N^{(m)}$ della superficie che sta per

traversare. Perciò scriveremo le due ultime equazioni come segue:

$$y - p' = \frac{\beta'}{n'}(x - N') + b', \qquad b' = b + t'\beta' + \Delta p,$$

dove

$$z - q' = \frac{\gamma'}{n'}(x - N') + c', \qquad c' = c + t'\gamma' + \Delta q,$$

e Δp^s significa, come al solito, la differenza $p^{s+1} - p^s$. Pel n. precedente le equazioni del cammino del raggio luminoso dopo la seconda rifrazione saranno dunque

$$y - p' = \frac{\beta''}{n''}(x - N') + b', \qquad \beta'' = \beta' + n'b',$$

dove

$$z - q' = \frac{\gamma''}{n''}(x - N') + c', \qquad \gamma'' = \gamma' + n'c',$$

ossia

$$y - p'' = \frac{\beta''}{n''}(x - N'') + b'', \qquad b'' = b' + t''\beta'' + \Delta p',$$

dove

$$z - q'' = \frac{\gamma''}{n''}(x - N'') + c'', \qquad c'' = c' + t''\gamma'' + \Delta q';$$

e così di seguito. Laonde, designando per maggior evidenza gli ultimi termini nelle serie delle

$$\beta, \quad \gamma, \quad n, \quad N, \quad p, \quad q, \quad b, \quad c, \quad u, \quad t,$$

cioè le quantità

$$\beta^{(\mu+1)}, \ \gamma^{(\mu+1)}, \ n^{(\mu+1)}, \ N^{(\mu)}, \ p^{(\mu)}, \ q^{(\mu)}, \ b^{(\mu)}, \ c^{(\mu)}, \ u^{(\mu)}, \ t^{(\mu)},$$

con

$$\beta^*, \quad \gamma^*, \quad n^*, \quad N^*, \quad p^*, \quad q^*, \quad b^*, \quad c^*, \quad u^*, \quad t^*,$$

le equazioni della retta d'emergenza saranno

$$\left.\begin{aligned} y - p^* &= \frac{\beta^*}{n^*}(x - N^*) + b^*, \\ z - q^* &= \frac{\gamma^*}{n^*}(x - N^*) + c^*. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

dove i quattro parametri finali o d'emergenza β^*, b^*, γ^*, c^*, vanno determinati in funzione dei quattro iniziali o d'incidenza β, b, γ, c mediante i due sistemi di equazioni

$$\begin{array}{ll}
\beta' = \beta + u\, b & \gamma' = \gamma + u\, c \\
b' = b + t'\, \beta' + \Delta p & c' = c + t'\, \gamma' + \Delta q \\
\beta'' = \beta' + u'\, b' & \gamma'' = \gamma' + u'\, c' \\
b'' = b' + t''\, \beta'' + \Delta p' & c'' = c' + t''\, \gamma'' + \Delta q' \\
\beta''' = \beta'' + u''\, b'' & \gamma''' = \gamma'' + u''\, c'' \\
b''' = b'' + t'''\, \beta''' + \Delta p'' & c''' = c'' + t'''\, \gamma''' + \Delta q'' \\
\beta^{IV} = \beta''' + u'''\, b''' & \gamma^{IV} = \gamma''' + u'''\, c''' \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Per la forma di queste equazioni è evidente la proprietà cardinale, che b^*, β^* sono funzioni lineari di b, β come c^*, γ^* di c, γ, e che in quelle funzioni b, β hanno gli stessi coefficienti che c, γ in queste.

Ma vogliamo risolvere immediatamente le equazioni col mezzo dei determinanti.

Risolviamo il primo sistema, supponendolo, pel momento, di sette equazioni, e però fra le sette incognite β', b', β'', b'', β''', b''', β^{IV}. Il determinante dei coefficienti delle incognite è l'unità, quindi la espressione di β^{IV} in b, β risulta

$$\beta^{IV} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta + u b \\
t' & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b + \Delta p \\
1 & u' & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & t'' & -1 & 0 & 0 & \Delta p' \\
0 & 0 & 1 & u'' & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & t''' & -1 & \Delta p'' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u''' & 0
\end{vmatrix}$$

Quanto alla espressione di b''', essa è la derivata di quella di β^{IV} rispetto ad u''', come può rilevarsi derivando l'ultima delle equa-

zioni rispetto ad u''', che non entra a formare nè β''', nè b'''. Per ridurre la espressione di β^{IV} alla forma più conveniente, mettiamo nel trovato determinante ciascuna colonna al posto della successiva, l'ultima al posto della prima, e decomponiamolo poscia in tre altri aventi rispettivamente per prima colonna

$$\begin{array}{ccc} ub & \beta & 0 \\ -b & 0 & \Delta p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta p' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta p'' \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

e per colonne successive quelle stesse del determinante unico. Come fattore di una intiera colonna, b si potrà mettere a fattore del primo determinante, nel quale si potranno scambiare tra loro i secondi elementi (-1, 1) della prima colonna e della prima linea, poichè gli altri, eccetto il primo, sono tutti nulli. Riducendo infine gli altri due determinanti ad essere del sesto ordine, otterremo

$$\beta^{IV} = b \begin{vmatrix} u & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u' & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t'' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u'' & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t''' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u''' \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} t' & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u' & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t'' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u'' & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t''' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u''' \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \Delta p & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u' & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta p' & 1 & t' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u'' & -1 & 0 \\ \Delta p'' & 0 & 0 & 1 & t''' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u''' \end{vmatrix}.$$

Il (determinante) coefficiente di β è manifestamente la derivata del coefficiente di b rispetto ad u; laonde vediamo che β^{IV} e b''' sono funzioni lineari di β e b, nelle quali i quattro coefficienti di β e b sono derivate di uno di essi rispetto ad u e ad u'''.

Ma veniamo al caso generale. Per scriverne brevemente la soluzione poniamo

$$\left.\begin{aligned} k=\begin{vmatrix} u^0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u'' & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t''' & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & t^{\cdot} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & u^{\cdot} \end{vmatrix}, \quad & l=\frac{\partial k}{\partial u}, \qquad g=\frac{\partial k}{\partial u^*}, \\ & h=\frac{\partial l}{\partial u^*}=\frac{\partial^2 k}{\partial u\,\partial u^*}=\frac{\partial g}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$i_\beta=\begin{vmatrix} \Delta p & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & u'' & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \Delta p' & 1 & t''' & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta p^{\mu-1} & 0 & 0 & \vdots & t^{\cdot} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & u^{\cdot} \end{vmatrix}, \quad i_b=\frac{\partial i_\beta}{\partial u^*}. \qquad (6)$$

Avremo

$$\left.\begin{aligned} b^* &= gb+h\beta-i_b, \\ \beta^* &= kb+l\beta-i_\beta. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Il secondo sistema di equazioni, essendo formato colle serie delle γ, c, u, t, Δq come il primo colle serie delle β, b, u, t, Δp, dà evidentemente

$$\left.\begin{aligned} c^* &= gc+h\gamma-i_c, \\ \gamma^* &= kc+l\,\gamma-i_\gamma, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

dove i_c, i_γ significano ciò che divengono i_b, i_β surrogando le Δq^m (intendasi tutte le Δq, $\Delta q'$,...) alle Δp^m. Nelle (5), (6), (7) sta espressa la completa soluzione del nostro problema.

43. La proprietà generale dei determinanti, di non alterarsi di valore invertendo l'ordine di successione delle linee e delle colonne, e la proprietà particolare ai determinanti g, h, k, l che sta scritta nell' eguaglianza

$$\frac{\partial k}{\partial u^*}\frac{\partial k}{\partial u}-1=k\frac{d^2 k}{\partial u^* \partial u} \quad (*),$$

ossia nella

$$gl-hk=1, \tag{8}$$

esprimono nel presente argomento la legge ottica, che un raggio di luce, il quale abbia percorso un cammino a traverso un sistema ottico, ritornerebbe a percorrere lo stesso cammino in senso inverso, se, retrocedendo per la retta secondo la quale è uscito, rientrasse nel sistema. Ed invero, considerando il sistema ottico che si otterrebbe capovolgendo il sin qui considerato, per la mentovata proprietà generale si fa manifesto, che i coefficienti g, h, k, l del nuovo sistema coincidono ordinatamente cogli l, h, k, g del primitivo; e per la proprietà particolare (8) si cava dalle (7)

$$\left.\begin{aligned} b &= l\,b^*-h\beta^*-i^*_b, & c &= l\,c^*-h\gamma^*-i^*_c,\\ -\beta &= k\,b^*-g\beta^*-i^*_\beta, & -\gamma &= k\,c^*-g\gamma^*-i^*_\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dove

$$\left.\begin{aligned} i^*_b &= -l\,i_b+hi_\beta, & i^*_c &= -li_c+hi_\gamma,\\ i^*_\beta &= -ki_b+gi_\beta, & i^*_\gamma &= -ki_c+gi_\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

e reciprocamente

$$\left.\begin{aligned} i_b &= -gi^*_b+hi^*_\beta, & i_c &= -gi^*_c+hi^*_\gamma,\\ i_\beta &= -ki^*_b+l\,i^*_\beta, & i_\gamma &= -ki^*_c+l\,i^*_\gamma; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(*) È caso particolare della formola (14) nella pag. 11 dei *Determinanti* del sig. BRIOSCHI (Pavia, 1854), ossia della penultima nella pag. 48 dei *Determinanti* del sig. BALTZER (Leipzig, 1864).

dalle quali formole tutte insieme colle (7) si rileva, che, nell'esprimere le quantità iniziali (d'incidenza) in termini delle finali, i coefficienti l, h, k, g prendono rispettivamente il posto tenuto dai coefficienti g, h, k, l nell'esprimere le finali in termini delle iniziali.

Le i (cioè $i_\beta, i_b \ldots i^*_\beta, i^*_b \ldots$) sono quantità infinitesime dell'ordine delle Δp^m e Δq^m. Se si indica con $k^{(s)}$ la derivata s^{ma} di k rispetto ai primi s elementi principali, ossia il determinante che risulta dal k sopprimendovi le prime s linee e colonne, le i possono anche esprimersi come segue

$$i_\beta = k^{(2)} \quad \Delta p + k^{(4)} \quad \Delta p' + k^{(6)} \quad \Delta p'' + \cdots$$

$$i_b = \frac{\partial k^{(2)}}{\partial u^*} \Delta p + \frac{\partial k^{(4)}}{\partial u^*} \Delta p' + \frac{\partial k^{(6)}}{\partial u^*} \quad \Delta p'' + \cdots,$$

. . . .

CAPITOLO II.

Strumenti non centrati.

44. Per riconoscere se siavi una retta che possa contenere tanto il cammino d'incidenza quanto quello d'emergenza di un raggio di luce, esaminiamo in prima le condizioni alle quali deve soddisfare un cammino d'incidenza affinchè il cammino d'emergenza gli riesca parallelo. Le condizioni stanno espresse in

$$\frac{\beta^*}{n^*}=\frac{\beta}{n}, \quad \frac{\gamma^*}{n^*}=\frac{\gamma}{n},$$

ossia in

$$\frac{kb+l\beta-i_\beta}{n^*}=\frac{\beta}{n}, \quad \frac{kc+l\gamma-i_\gamma}{n^*}=\frac{\gamma}{n}.$$

Cavando da queste due equazioni le espressioni di b e c in β e γ, e sostituendole nelle equazioni (3) della retta d'incidenza, queste, raccoltevi β e γ, si presentano come segue:

$$y-\Omega_y=\frac{\beta}{n}(x-\Omega_x), \quad z-\Omega_z=\frac{\gamma}{n}(x-\Omega_x),$$

dove s'intende

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x-N&=\frac{nl-n^*}{k}, \\ \Omega_y-p=\frac{i_\beta}{k}, &\quad \Omega_z-q=\frac{i_\gamma}{k}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per il parallelismo tra le rette d'incidenza e d'emergenza si compendiano dunque in questa, che la retta d'incidenza passi pel punto fisso di coordi-

nate Ω_x, Ω_y, Ω_z, il quale significheremo d'ora innanzi con Ω. Per la legge di reciprocità che vige in questa teoria, le condizioni del parallelismo dovranno anche equivalere al passaggio delle rette d'emergenza per un punto fisso Ω^*, imagine di Ω. Analiticamente ciò si riconosce, e si ottengono le coordinate di Ω^*, cavando dalle condizioni del parallelismo, coll'uso delle (9), le espressioni di b^* e c^* in β^* e γ^* e sostituendole nelle equazioni (4) della retta d'emergenza; oppure mettendo le già usate espressioni di b e c in termini di β e γ nelle (7) che danno b^* e c^*, ed i risultamenti nelle equazioni d'emergenza

$$y-p^*=\frac{\beta}{n}(x-N^*)+b^*, \quad z-q^*=\frac{\gamma}{n}(x-N^*)+c^*.$$

Queste equazioni insomma si presentano come segue

$$y-\Omega^*_y=\frac{\beta}{n}\left(x-\Omega^*_x\right), \quad z-\Omega^*_z=\frac{\gamma}{n}\left(x-\Omega^*_x\right)$$

dove s'intende

$$\left.\begin{array}{c} N^*-\Omega^*_x=\dfrac{n^*g-n}{k} \\ \Omega^*_y-p^*=\dfrac{i^*_\beta}{k}=\dfrac{gi_\beta}{k}-i_b, \quad \Omega^*_z-q^*=\dfrac{i^*_\gamma}{k}=\dfrac{gi_\gamma}{k}-i_c. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Le coordinate laterali di Ω e Ω^* differiscono dalle coordinate laterali dei punti M^m, N^m di quantità dell'ordine delle Δp^m, $\Delta q.^m$

La definizione dei due punti nodali di un sistema centrato sta in ciò, che a qualunque retta d'incidenza passante pel primo punto corrisponde una retta d'emergenza passante pel secondo e parallela alla prima. Conservando la stessa definizione, possiamo dunque asserire che in qualunque strumento ottico, sia o no perfettamente centrato, esiste sempre una ed una sola coppia di punti nodali. Ω è il primo punto nodale, Ω^* il secondo.

45. Dall'esposto teorema segue evidentemente quest'altro, che in qualunque strumento ottico, anche non centrato, esiste sempre una ed una sola retta contenente il cammino d'incidenza e quello d'emergenza di un raggio di luce.

Questa retta è quella dei punti nodali, della quale sono quindi equazioni le

$$y-\Omega_y=\frac{\Omega^*_y-\Omega_y}{\Omega^*_x-\Omega_x}(x-\Omega_x),\quad z-\Omega_z=\frac{\Omega^*_z-\Omega_z}{\Omega^*_x-\Omega_x}(x-\Omega_x).\quad (14)$$

Affinchè questa retta possa contenere i cammini d'incidenza e d'emergenza di un raggio di luce da aversi per ammissibile in queste ricerche, bisogna che essa faccia un angolo sufficientemente piccolo coll'asse delle x. Si può dire che in generale questa piccolezza avrà luogo, essendo le differenze $\Omega^*_y-\Omega_y$, $\Omega^*_z-\Omega_z$, e non la $\Omega^*_x-\Omega_x$, giusta le formole (12) e (13), quantità dell'ordine delle Δp^m, Δq^n. La condizione della piccolezza sarà soddisfatta ogni qualvolta l'ordine delle Δp^m, Δq^n superi quello della quantità

$$N^*-N+\frac{n(1-l)+n^*(1-g)}{k},$$

che è il valore della differenza tra le x dei punti nodali. Però gli ordini, che qui potremmo supporre per le Δp^m, Δq^m, non sono che il primo e il secondo; poichè, trascurandosi nelle presenti ricerche il terz'ordine, il supporre le Δp^m, Δq^m di quest'ordine varrebbe quanto supporle nulle.

Pel modo con cui venne trovata, la retta (14) potrebbe dirsi retta nodale; ma vogliamo chiamarla retta cardinale per esprimere che rispetto ad essa si verificano tutte le proprietà che esistono nei sistemi centrati per rispetto all'asse centrale in quanto contenga i punti cardinali.

D'altronde si può conseguire questa retta anche altramente. Indicheremo come vorremmo conseguirla prendendo in considerazione le proprietà dei fuochi principali. La definizione di questi punti per un sistema centrato non suol richiedere attenzione, dicendosi che il secondo fuoco è quello dove i raggi, che cadono sullo strumento parallelamente all'asse centrale, concorrono, realmente o virtualmente, emergendo. Ma, per uno strumento i cui centri non siano in linea retta, qual direzione devono avere i raggi incidenti affinchè il punto dove concorrono emergendo sia da riguardarsi come il secondo

fuoco principale, e non come un punto qualunque della seconda superficie focale principale? Determineremmo adunque la direzione per modo che avesse a coincidere, come nel caso del sistema centrato, con quella della retta congiungente i fuochi primo e secondo che essa somministra; ed in questa retta avremmo la cardinale.

Per mettere in evidenza che, per rispetto a tutte le proprietà cardinali, la retta cardinale tiene in un sistema non centrato perfettamente il posto della retta dei centri in un sistema centrato, riferiremo il sistema che consideriamo ad una nuova terna di assi di coordinate ortogonali X, Y, Z, pigliando per asse delle X la retta cardinale, e per asse delle Z una perpendicolare a questa retta ed al primitivo asse delle x. Le Y, Z dei punti nodali saranno zero, ed occorrerà soltanto di significarne le X, il che faremo con gli stessi segni Ω e Ω^* che già denotano i punti, lasciando arbitraria la posizione della nuova origine delle coordinate nella retta cardinale. Basterà risolvere in riguardo ai nuovi assi il solito problema di trovare come dipendano i parametri d'emergenza da quelli d'incidenza. Riferendo la retta d'incidenza al primo punto nodale e quella d'emergenza al secondo, cioè ponendone le rispettive equazioni nelle forme

$$Y=\beta_\omega(X-\Omega)+b_\omega, \qquad Z=\gamma_\omega(X-\Omega)+c_\omega \qquad (15)$$

$$Y=\beta^*_\omega(X-\Omega^*)+b^*_\omega, \qquad Z=\gamma^*_\omega(X-\Omega^*)+c^*_\omega, \qquad (16)$$

si tratta di trovare come dipendano

$$\beta^*_\omega,\ \gamma^*_\omega,\ b^*_\omega,\ c^*_\omega \ \text{da}\ \beta_\omega,\ \gamma_\omega,\ b_\omega,\ c_\omega.$$

Indichiamo per brevità con λ, μ, ν i coseni degli angoli che la retta cardinale fa cogli assi primitivi, ossia poniamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda}{\Omega^*_x-\Omega_x}=\frac{\mu}{\Omega^*_y-\Omega_y}=\frac{\nu}{\Omega^*_z-\Omega_z}=\\ =\frac{1}{\left[(\Omega^*_x-\Omega_x)^2+(\Omega^*_y-\Omega_y)^2+(\Omega^*_z-\Omega_z)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Si trova subito che i coseni degli angoli che i nuovi assi fanno coi primitivi sono gli esposti nel seguente quadro

	x	y	z	
X	λ	μ	ν	
Y	ϖ	$-\frac{\lambda\mu}{\varpi}$	$-\frac{\lambda\nu}{\varpi}$,	dove $\varpi^2=\mu^2+\nu^2$. (18)
Z	0	$\frac{\nu}{\varpi}$	$-\frac{\mu}{\varpi}$	

Introducendo nelle (3) e (4) le espressioni delle x, y, z in X, Y, Z, e riducendole rispettivamente alle forme (15) e (16), dal confronto otterremo le espressioni delle β_ω, γ_ω, b_ω, c_ω in β, γ, b, c, non che quelle delle β^*_ω, γ^*_ω, b^*_ω, c^*_ω in β^*, γ^*, b^*, c^*; ed allora le (7) diranno come dipendano le β^*_ω, γ^*_ω, b^*_ω, c^*_ω dalle β_ω, γ_ω, b_ω, c_ω. Però, basterà trasformare le (3); perchè le espressioni che troveremo delle β_ω, γ_ω, b_ω, c_ω in β, γ, b, c evidentemente diverranno quelle delle β^*_ω, γ^*_ω, b^*_ω, c^*_ω in β^*, γ^*, b^*, c^* collo scambiarvi ciascun primo termine (N, β,...) di una serie di quantità coll'ultimo (N^*, β^*,...) della serie stessa.

Scriviamo le (3) come segue

$$y-\Omega_y=\frac{\beta}{n}(x-\Omega_x)+B, \quad z-\Omega_z=\frac{\gamma}{n}(x-\Omega_x)+C,$$

ritenendo per brevità

$$B=\frac{\beta}{n}(\Omega_x-N)+b-\Omega_y+p, \quad C=\frac{\gamma}{n}(\Omega_x-N)+c-\Omega_z+q; \quad (19)$$

e facciamovi la sostituzione

$$\left.\begin{aligned} x-\Omega_x&=(X-\Omega)\cos Xx+Y\cos Yx+Z\cos Zx,\\ y-\Omega_y&=(X-\Omega)\cos Xy+Y\cos Yy+Z\cos Zy,\\ z-\Omega_z&=(X-\Omega)\cos Xz+Y\cos Yz+Z\cos Zz.\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Otteniamo due equazioni che, risolute rispetto a Y e Z, tenuto conto dei valori (18) dei coseni, danno

$$\left(\lambda+\mu\frac{\beta}{n}+\nu\frac{\gamma}{n}\right)Y=\left(\varpi-\frac{\lambda\mu}{\varpi}\frac{\beta}{n}-\frac{\lambda\nu}{\varpi}\frac{\gamma}{n}\right)(X-\Omega)-\frac{\mu}{\varpi}B-\frac{\nu}{\varpi}C$$

$$\left(\lambda+\mu\frac{\beta}{n}+\nu\frac{\gamma}{n}\right)Z=\left(\frac{\nu}{\varpi}\frac{\beta}{n}-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\gamma}{n}\right)(X-\Omega)+\frac{\lambda\nu}{\varpi}B-\frac{\lambda\mu}{\varpi}C+$$
$$+\frac{\varpi B\gamma}{n}-\frac{\varpi C\beta}{n}.$$

Se l'angolo della retta cardinale coll'asse delle x è del prim'ordine, il suo coseno, cioè λ, differisce dall'unità di una quantità del second'ordine, e sono anche del prim'ordine i coseni μ e ν; e però, tralasciando le quantità del terz'ordine (il che potrebbe farsi anche prima), queste equazioni prendono la forma

$$\left.\begin{aligned} Y&=\left(\varpi-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\beta}{n}-\frac{\nu}{\varpi}\frac{\gamma}{n}\right)(X-\Omega)-\frac{\mu}{\varpi}B-\frac{\nu}{\varpi}C,\\ Z&=\left(\frac{\nu}{\varpi}\frac{\beta}{n}-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\gamma}{n}\right)(X-\Omega)+\frac{\nu}{\varpi}B-\frac{\mu}{\varpi}C.\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Abbiamo dunque

$$\left.\begin{aligned} \beta_\omega&=\varpi-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\beta}{n}-\frac{\nu}{\varpi}\frac{\gamma}{n}, & b_\omega&=-\frac{\mu}{\varpi}B-\frac{\nu}{\varpi}C,\\ \gamma_\omega&=\frac{\nu}{\varpi}\frac{\beta}{n}-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\gamma}{n}, & c_\omega&=\frac{\nu}{\varpi}B-\frac{\mu}{\varpi}C.\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

E quindi, come fu osservato,

$$\left.\begin{aligned} \beta^*_\omega&=\varpi-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\beta^*}{n^*}-\frac{\nu}{\varpi}\frac{\gamma^*}{n^*}, & b^*_\omega&=-\frac{\mu}{\varpi}B^*-\frac{\nu}{\varpi}C^*,\\ \gamma^*_\omega&=\frac{\nu}{\varpi}\frac{\beta^*}{n^*}-\frac{\mu}{\varpi}\frac{\gamma^*}{n^*}, & c^*_\omega&=\frac{\nu}{\varpi}B^*-\frac{\mu}{\varpi}C^*,\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

dove s'intende

$$B^*=-\frac{\beta^*}{n^*}\left(X^*-\Omega^*_x\right)+b^*-\Omega^*_y+p^*,\qquad C^*=-\frac{\gamma^*}{n^*}\left(X^*-\Omega^*_x\right)+c^*-\Omega^*_z+q^*.\quad(42)$$

Ora, confrontando B^* con B, C^* con C per mezzo delle (7), (12), (13), si riconoscono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} nB = n^* B^* &= \frac{nn^*}{k}\left(\frac{\beta^*}{n^*} - \frac{\beta}{n}\right), \\ nC = n^* C^* &= \frac{nn^*}{k}\left(\frac{\gamma^*}{n^*} - \frac{\gamma}{n}\right); \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

e però, confrontando b^*_ω e β^*_ω-β_ω con b_ω, c^*_ω e γ^*_ω-γ_ω con c_ω, si vede che i parametri d'emergenza dipendono da quelli d'incidenza nel modo semplicissimo seguente

$$\left.\begin{aligned} b^*_\omega &= \frac{n}{n^*} b_\omega, \qquad & \beta^*_\omega &= \beta_\omega + \frac{k}{n^*} b_\omega, \\ c^*_\omega &= \frac{n}{n^*} c_\omega, \qquad & \gamma^*_\omega &= \gamma_\omega + \frac{k}{n^*} c_\omega. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

La forma delle equazioni (15), (16), (26) non subisce verun cambiamento se si suppone che le Δp^n, Δq^n diventino nulle, cioè che il sistema diventi centrato, e quindi la retta cardinale diventi l'asse centrale. Ma tutte le proprietà cardinali dei sistemi ottici centrati sono, come vedremo, conseguenze delle formole (15), (16), (26). È dunque così messo in evidenza, come volevamo, che tutte le proprietà cardinali degli strumenti ottici centrati sussistono anche pei non centrati, comparendo in luogo dell'asse centrale la retta cardinale.

46. La via che abbiamo scelto nei due n. precedenti esclude il caso di $k=0$. Consideriamo ora dunque questo caso, che, del resto, per altre vie avremmo anche potuto inchiudere nella trattazione generale. Quando k diventa zero, i punti nodali vanno all'infinito, ed il sistema si dice telescopico, perchè emette paralleli i raggi che riceve paralleli; come si fa manifesto per le formole (7), le quali divengono

$$\left.\begin{aligned} b^* &= gb + h\beta - i_b, \qquad & c^* &= gc + h\gamma - i_c, \\ \beta^* &= \quad\; l\beta - i_\beta, \qquad & \gamma^* &= \quad\; l\gamma - i_\gamma, \end{aligned}\right\} \quad (7)'$$

e mostrano che i parametri β^* e γ^* dipendono soltanto da β e γ, e non più eziandio da b e c.

Cerchiamo ancora se siavi una retta che possa contenere ad un tempo i cammini d'incidenza e d'emergenza di un raggio di luce. Pel parallelismo dei due cammini dev'essere

$$\frac{\beta^*}{n^*}=\frac{\beta}{n}, \qquad \frac{\gamma}{n^*}=\frac{\gamma}{n};$$

la direzione dei cammini resta quindi determinata, poichè queste equazioni e le (7)' danno

$$\frac{\beta}{n}=\frac{i_\beta}{nl-n^*}, \qquad \frac{\gamma}{n}=\frac{i_\gamma}{nl-n^*}.$$

Affinchè poi i due cammini cadano in una medesima retta deve anche essere

$$p^*-\frac{\beta^*}{n^*}N^*+b^*=p-\frac{\beta}{n}N+b.$$

$$q^*-\frac{\gamma^*}{n^*}N^*+c^*=q-\frac{\gamma}{n}N+c.$$

Queste eqnazioni riescono soddisfatte per una ed una sola coppia di valori di b, c; e però concludiamo, che, **anche per un sistema telescopico, sia o no perfettamente centrato, esiste sempre una ed una sola retta contenente i cammini d'incidenza e d'emergenza di nn raggio di luce.** Chiameremo qui pure tal retta la **cardinale** del sistema.

Cerchiamo se siavi un punto imagine di sè stesso. Indicheremo con C un tal punto, e con C_x, C_y, C_z le sue coordinate. Il punto C non potrebb'essere fuori della cardinale; poichè la retta d'incidenza passante per C parallelamente alla cardinale dovrebbe anche essere retta d'emergenza. Ogniqualvolta i parametri d'incidenza soddisfacessero le

$$C_y-p=\frac{\beta}{n}(C_x-N)+b,$$

$$C_z-q=\frac{\gamma}{n}(C_x-N)+c,$$

la retta d'incidenza passerebbe per C, e dovrebbe quindi pas-

sarvi anche quella d'emergenza, cioè dovrebbero risultare soddisfatte anche le

$$C_y - p^* = \frac{l\beta - i_\beta}{n^*}(C_x - N^*) + gb + h\beta - i_b,$$

$$C_z - q^* = \frac{l\gamma - i_\gamma}{n^*}(C_x - N^*) + gc + h\gamma - i_c.$$

Ora, sottraendo ciascuna di queste due equazioni dalla corrispondente tra le altre due moltiplicate per g, le due equazioni che ne risultano restano soddisfatte identicamente, cioè qualunque siano β e γ, se si determinino le coordinate C_x, C_y, C_z con le equazioni

$$\left.\begin{aligned} g\frac{C_x - N}{n} + l\frac{N^* - C_x}{n^*} - h = 0\,, \\ (g-1)C_y - gp + p^* = i_\beta\frac{C_x - N^*}{n^*} + i_b\,, \\ (g-1)C_z - gq + q^* = i_\gamma\frac{C_x - N^*}{n^*} + i_c\,. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Per ogni sistema telescopico evvi dunque uno ed un solo punto imagine di sè stesso. Intendasi nel finito; giacchè è imagine di sè stesso anche il punto all'infinito nella cardinale.

Mediante le coordinate di questo punto, le equazioni della retta cardinale si possono scrivere come segue:

$$\frac{x - C_x}{nl - n^*} = \frac{y - C_y}{i_\beta} = \frac{z - C_z}{i_\gamma}. \qquad (14)'$$

Per mettere in chiaro tutta l'importanza di questa retta, riferiremo anche qui tutti i punti del sistema ad una terna di assi di coordinate ortogonali X, Y, Z, prendendo come asse delle X la cardinale, come asse delle Z una perpendicolare alla medesima e all'asse delle x, e fissando l'origine delle coordinate nel punto C; e qui pure cercheremo come dipendano i parametri d'emergenza da quelli d'incidenza. Siano dunque

$$Y = \beta_\omega X + b_\omega\,, \qquad Z = \gamma_\omega X + c_\omega \qquad (15)'$$

$$Y = \beta^*_\omega X + b^*_\omega\,, \qquad Z = \gamma^*_\omega X + c^*_\omega \qquad (16)'$$

le equazioni delle rette d'incidenza e d'emergenza; e λ, μ, ν i coseni degli angoli che la retta cardinale fa cogli assi primitivi, coseni determinati dalle formole

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda}{nl-n^*}=\frac{\mu}{i_\beta}=\frac{\nu}{i_\gamma}= \\ &=\frac{1}{\left[(nl-n^*)^2_1+i_\beta^2+i_\gamma^2\right]^{\frac{1}{2}}}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (17)'$$

I nove coseni degli angoli tra gli assi saranno ancora forniti dal quadro (18).

Scriviamo le (3) e (4) come segue:

$$y-C_y=\frac{\beta}{n}(x-C_x)+B\,, \qquad z-C_z=\frac{\gamma}{n}(x-C_x)+C\,,$$

$$y-C_y=\frac{\beta^*}{n^*}(x-C_x)+B^*\,, \qquad z-C_z=\frac{\gamma^*}{n^*}(x-C_x)+C^*\,;$$

le B e C, B^* e C^* resteranno ancora espresse dalle formole (19) e (24) dove si ponga la lettera C in luogo della Ω. Facendo nelle scritte equazioni la sostituzione (20), in cui Ω_x, Ω_y, Ω_z, Ω s'intendano surrogate da C_x, C_y, C_z, 0, si ottengono due coppie di equazioni affatto simili alle (21) con 0 in luogo di Ω, l'una coppia per la retta d'incidenza, l'altra per quella d'emergenza. E però i parametri β_ω, γ_ω, b_ω, c_ω riescono espressi in β, γ, b, c ancora giusta le formole (22), ed i parametri β^*_ω, γ^*_ω, b^*_ω, c^*_ω, in β^*, γ^*, b^*, c^* giusta le formole (23). Ora, confrontando B^* con B, e C^* con C, per mezzo delle (7)' e (27), si vede subito essere

$$B^*=gB\,, \qquad C^*=gC;$$

d'onde

$$b^*_\omega=gb_\omega\,, \qquad c^*_\omega=gc_\omega\,.$$

Confrontando γ^* con γ_ω, per mezzo delle (7)', si ha pure subito

$$n^*\gamma^*_\omega=nl\gamma_\omega\,;$$

e confrontando finalmente β^*_ω con β_ω, sempre per mezzo delle (7)', e trascurando la quantità

$$\frac{\mu}{\varpi} i_\beta + \frac{\nu}{\varpi} i_\gamma - \varpi(nl - n^*) = \varpi(nl - n^*)\left[(1-\varpi^2)^{-\frac{1}{2}} - 1\right], (*)$$

che è dell'ordine di ϖ^3, cioè del terzo, si ottiene parimenti

$$n^* \beta^*_\omega = nl\,\beta_\omega .$$

In luogo delle (26) abbiamo dunque nel presente caso le

$$\left.\begin{array}{ll} b^*_\omega = g b_\omega\,, & \beta^*_\omega = \frac{nl}{n^*}\beta_\omega\,, \\ c^*_\omega = g c_\omega\,, & \gamma^*_\omega = \frac{nl}{n^*}\gamma_\omega\,; \end{array}\right\} \qquad (26)'$$

ossia, le equazioni della retta d'incidenza e d'emergenza sono rispettivamente le seguenti

$$\left.\begin{array}{ll} Y = \beta_\omega X + b_\omega\,, & Z = \gamma_\omega X + c_\omega \\ Y = \frac{nl}{n^*}\beta_\omega X + g b_\omega\,, & Z = \frac{nl}{n^*}\gamma_\omega X + g c_\omega \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Concludiamo, analogamente al conchiuso alla fine del n. precedente, che nelle formole (15)', (16)', (26)', oppure senz'altro nelle (28), sta scritto che in un sistema telescopico non centrato hanno pur luogo tutte le proprietà cardinali dei telescopi centrati, comparendo in vece della retta dei centri la retta cardinale.

(*) Se la direzione positiva delle X ha da fare l'angolo piccolissimo colla positiva delle x, il λ va preso positivo; laonde, essendo $nl - n^* > 0$, i coseni μ e ν vanno presi dello stesso segno di i_β e i_γ.

CAPITOLO III.

Continuazione della teoria pei sistemi centrati.

Ora vogliamo investigare le proprietà dei sistemi centrati, pigliando le mosse dalla fine del capitolo I, nel quale riguarderemo come nulle tutte le quantità

$$p^m,\ q^m,\ i_\beta,\ i_b,\ i_\gamma,\ i_c,\ i^*_\beta,\ i^*_b,\ i^*_\gamma,\ i^*_c\,.$$

47. Sia P un punto della retta d'incidenza rappresentata dalle equazioni (3) e ξ, η, ζ le coordinate di esso punto, che soddisferanno quindi le equazioni

$$\eta=\frac{\beta}{n}(\xi-N)+b\,,\qquad \zeta=\frac{\gamma}{n}(\xi-N)+c\,.$$

Sostituendo in queste equazioni per β, b, γ, c le espressioni (9) e cavando b^* e c^* dalle equazioni risultanti, si avrà

$$b^*=\frac{n\eta+[nh-g(\xi-N)]\beta^*}{nl-k(\xi-N)}\,,\quad c^*=\text{analog.}$$

Sostituendo questi valori di b^*, c^* nelle equazioni (4) della retta d'emergenza, queste si riducono alla forma

$$y=\eta^*+\frac{\beta^*}{n^*}(x-\xi^*)\,,\qquad z=\zeta^*+\frac{\gamma^*}{n^*}(x-\xi^*)$$

ove s'intenda

$$\left.\begin{array}{c}\xi^*=N^*-\dfrac{nh-g(\xi-N)}{nl-k(\xi-N)}n^*\\[2ex] \eta^*=\dfrac{n\eta}{nl-k(\xi-N)}\,,\quad \zeta^*=\dfrac{n\zeta}{nl-k(\xi-N)}\,.\end{array}\right\}\qquad(29)$$

Il punto P^*, di coordinate ξ^*, η^*, ζ^*, giace dunque nella retta d'emergenza; e poichè nelle espressioni di queste coordinate non entrano β, b, γ, c, ma soltanto ξ, η, ζ, il punto P^* rimarrà lo stesso per tutte le rette d'incidenza passanti per P. Si può considerare P come un oggetto o punto luminoso e P^* come sua imagine. Quello sarà reale, se cadrà nel primo mezzo, cioè se sarà negativa la differenza $\xi - N$; questo sarà reale, se cadrà nell'ultimo mezzo, cioè se la differenza $\xi^* - N^*$ sarà positiva; nei casi contrari, oggetto od imagine od entrambi saranno virtuali.

Dall'essere il rapporto tra η^* e η eguale al rapporto tra ζ^* e ζ segue che i punti P^*, P giacciono in un piano coll'asse delle x, cioè coll'asse centrale; e dall'essere ξ^* e il detto rapporto indipendenti da η e ζ segue inoltre che ad un sistema di punti P situati in uno stesso piano normale all'asse delle x corrisponde un sistema di punti P^* situati parimenti in un medesimo piano normale al detto asse, e che questo sistema è simile al primo, e similmente od inversamente posto, secondo il segno positivo o negativo di quel rapporto. Il quale può dirsi l'ingrandimento lineare attuale o variabile operato dallo strumento, ed è espresso da

$$\frac{n}{nl - k\,(\xi - N)} = \frac{n^* g - k\,(N^* - \xi^*)}{n^*}. \qquad (30)$$

Il centro di similitudine dei due piani è quel punto dell'asse centrale la cui x soddisfa l'equazione

$$\frac{\xi - x}{\xi^* - x} = \frac{n}{nl - k(\xi - N)}, \qquad (31)$$

nella quale si potrà surrogare la ξ^* colla sua espressione in termini di ξ, perchè sia più evidente come la x varii al variare della ξ.

48. Le rette d'incidenza e d'emergenza furono finora più specialmente riferite alla prima ed all'ultima superficie ossia ai punti N e N^*. Ma per risolvere più prontamente i principali problemi, giova riferirle a due punti Q e Q^* indeterminati per ora sull'asse delle x, che verranno determinati opportunamente in seguito. Siano dunque

$$y=\frac{\beta}{n}\;(x-Q\;)+B\;,\qquad z=\frac{\gamma}{n}\;(x-Q\;)+C\;,\;(32)$$

$$y=\frac{\beta^*}{n^*}\,(x-Q^*)+B^*\;,\qquad z=\frac{\gamma^*}{n^*}\,(x-Q^*)+C^*\;,\;(33)$$

le nuove forme da darsi alle equazioni delle rette d'incidenza e d'emergenza. Affinchè queste equazioni coincidano rispettivamente colle (3) e (4) bisogna che siano

$$b=B+\theta\;\beta\;,\qquad c=C+\theta\;\gamma$$

$$B^*=b^*+\theta^*\beta^*,\qquad C^*=c^*+\theta^*\gamma^*$$

dove θ, θ^* significano

$$\frac{N-Q}{n}=\theta,\qquad \frac{Q^*-N^*}{n^*}=\theta^*.\qquad (34)$$

Da queste relazioni e dalle (7) si deducono le espressioni dei parametri d'emergenza β^*, γ^*, B^*, C^* in termini di quelli d'incidenza β, γ, B, C. Ponendo

$$\left.\begin{array}{l} G=g+\theta^*k,\\ H=h+\theta g+\theta\theta^*k+\theta^*l,\\ K=k,\\ L=l+\theta k, \end{array}\right\}\qquad (35)$$

queste espressioni sono

$$\begin{array}{ll} B^*=G\,B+H\beta\,, & C^*=G\,C+H\gamma\,,\\ \beta^*\;=K\,B+L\beta\,, & \gamma^*\;=KC+L\,\gamma\,. \end{array}\qquad (36)$$

I coefficienti G, H, K, L, che ora compajono in luogo dei g, h, k, l, hanno pure tra loro la relazione

$$GL-HK=1\,.$$

49. Quando si vorrà che i punti Q e Q^* riescano conjugati, bisognerà stabilire tra le loro ascisse la prima delle re-

lazioni (29). Ora vogliamo notare che questa relazione riducesi alla forma

$$H = 0\,, \tag{37}$$

oppure

$$GL = 1\,. \tag{37}$$

50. La introduzione delle due ascisse arbitrarie Q e Q^* giova assai, come dicemmo, pel pronto conseguimento degli scopi ai quali si deve qui mirare. Ne fanno subito prova le sette determinazioni di esse arbitrarie che ora esponiamo.

Prima determinazione. Vogliamo determinare Q e Q^* in modo che alle rette d'incidenza parallele all'asse delle x corrispondano rette d'emergenza passanti per Q^*, ed alle rette d'incidenza passanti per Q rette d'emergenza parallele all'asse delle x.

Bisogna che per $\beta = 0$ (*) risulti $B^* = 0$ qualunque sia B; e che per $B = 0$ risulti $\beta^* = 0$ qualunque sia β. Perciò dobbiamo porre

$$G = 0\,, \quad L = 0\,, \quad \text{d'onde } H = -\frac{1}{k}\,\cdot \tag{38}$$

Le (35) daranno i valori di θ e θ^* e le (34) i richiesti valori di Q e Q^*, che indicheremo con F e F^*. Considereremo più innanzi quelle altre proprietà di questi punti o dei piani normali in essi all'asse centrale che sono le più prossime conseguenze delle condizioni (38). E ciò sia detto anche per le altre coppie di punti che passiamo a determinare.

Seconda determinazione. Vogliamo che i parametri d'emergenza compajano espressi con quelli d'incidenza nella stessa maniera che si verifica per il caso di una sola rifrazione; cioè vogliamo che le formole (36) divengano simili alle (N. 41)

$$b' = b \quad, \quad c' = c \quad,$$
$$\beta' = ub + \beta\,, \quad \gamma' = uc + \gamma\,.$$

(*) Per brevità lasciamo sottintese le analoghe condizioni per le equazioni in z, x.

Perciò dobbiamo porre le condizioni

$$G=1, \quad H=0, \quad L=1, \tag{39}$$

una delle quali è conseguenza delle altre due. I valori che si ottengono per Q, Q^* in questo caso li indicheremo con E, E^*. Questi punti o piuttosto i piani E, E^* si dividono tra loro l'officio che nel caso di un sistema di due mezzi è fatto dall'unico punto N, vertice della superficie dividente, o dal piano N. I piani E, E^* sono conjugati ($H=0$), ed i punti conjugati in essi, avendo le medesime coordinate laterali ($B^*=B$, $C^*=C$), sono in una parallela all'asse delle x.

Terza determinazione. Per conseguire piani conjugati in cui le figure corrispondenti siano eguali, come testè, ma non egualmente, bensì inversamente poste ($B^*=-B$, $C^*=-C$), bisogna porre

$$G=-1, \quad H=0, \quad \text{d'onde } L=-1. \tag{40}$$

Indicheremo con E, E^* i valori che vengono così a prendere Q, Q^*.

Quarta determinazione. Nel caso di un sistema formato con una sola superficie dividente, una retta d'incidenza resta anche retta d'emergenza, purchè passi pel centro di curvatura. Nel nostro caso possiamo determinare Q e Q^* in modo che ad ogni retta d'incidenza passante per Q corrisponda qual retta d'emergenza la parallela ad essa passante per Q^*.

Infatti, volendo che Q e Q^* sieno conjugati e che per $B=0$ riesca

$$\frac{\beta^*}{n^*}=\frac{\beta}{n}, \quad \text{ossia} \quad \beta^*=\frac{n^*}{n}\beta,$$

basta porre

$$H=0, \quad L=\frac{n^*}{n}, \quad \text{d'onde } G=\frac{n}{n^*}. \tag{41}$$

Diremo Ω, Ω^* i valori che ne scaturiscono per Q, Q^*.

Quinta determinazione. Vogliamo che ad ogni retta d'incidenza passante per Q corrisponda una retta d'emergenza passante per Q^*, giacente nel piano di quella e dell'asse delle x, e formante con quest'asse lo stesso angolo che quella, ma dalla banda contraria.

Bisognerà che per $B=0$ risulti

$$\frac{\xi^*}{n^*} = -\frac{\xi}{n},$$

e quindi bisogna porre

$$H=0, \quad L=-\frac{n^*}{n}, \quad \text{d'onde } G=-\frac{n}{n^*}. \qquad (42)$$

Diremo Ω, Ω^* i valori di Q, Q^* in questo caso.

Sesta e settima determinazione. Indicheremo col simbolo N^{**}, come Gauss, il punto (oculare) conjugato di N, e con N^{oo} il punto che ha per imagine N^*. La prima delle (29) dà $\xi^* = N^{**}$, facendovi $\xi = N$; e $\xi = N^{oo}$, facendovi $\xi^* = N^*$; e così si ottiene

$$N^{**} = N^* - \frac{h}{l}\, n^* \qquad (43)$$

$$N^{oo} = N + \frac{h}{g}\, n. \qquad (44)$$

Ciò posto, per $Q = N$ e $Q^* = N^{**}$, si ha

$$G=\frac{1}{l}, \quad H=0, \quad L=l; \qquad (45)$$

e per $Q = N^{oo}$ e $Q^* = N^*$, si ha

$$G=g, \quad H=0, \quad L=\frac{1}{g}. \qquad (46)$$

Riassumiamo le fatte determinazioni nel seguente quadro, in ogni linea del quale si legge, di seguito all'equazione (in y e x, tralasciando l'analoga in z e x) della retta d'incidenza riferita al punto Q considerato in essa linea, la equazione della retta d'emergenza riferita al punto Q^*. Nel confronto di queste equazioni chi conosce gli elementi della geometria analitica trova opportunamente compendiata l'azione del sistema ottico su ogni singolo raggio di luce. Il significato dei simboli Φ e Φ^* sta espresso nelle due equazioni

$$\Phi = -\frac{n}{k}, \qquad \Phi^* = -\frac{n^*}{k}. \qquad (47)$$

Q	Q^*	Retta d'inciden.	Retta d'emergenza
$F = N - l\Phi$	$F^* = N^* + g\Phi^*$	$y = \frac{\beta}{n}(x - F) + B$	$y = -\frac{B}{\Phi^*}(x - F^*) - \frac{\beta}{k}$
$E = F + \Phi$	$E^* = F^* - \Phi^*$	$y = \frac{\beta}{n}(x - E) + B$	$y = \left(\frac{\beta}{n^*} - \frac{B}{\Phi^*}\right)(x - E^*) + B$
$\underline{E} = F - \Phi$	$\underline{E}^* = F^* + \Phi^*$	$y = \frac{\beta}{n}(x - \underline{E}) + B$	$y = \left(-\frac{\beta}{n^*} - \frac{B}{\Phi^*}\right)(x - \underline{E}^*) - B$
$\Omega = F + \Phi^*$	$\Omega^* = F^* - \Phi$	$y = \frac{\beta}{n}(x - \Omega) + B$	$y = \left(\frac{\beta}{n} - \frac{B}{\Phi^*}\right)(x - \Omega^*) + \frac{n}{n^*}B$
$\underline{\Omega} = F - \Phi^*$	$\underline{\Omega}^* = F^* + \Phi$	$y = \frac{\beta}{n}(x - \underline{\Omega}) + B$	$y = \left(-\frac{\beta}{n} - \frac{B}{\Phi^*}\right)(x - \underline{\Omega}^*) - \frac{n}{n^*}B$
N	$N^{**} = F^* - \frac{\Phi}{l}$	$y = \frac{\beta}{n}(x - N) + B$	$y = \left(\frac{l\beta}{n^*} - \frac{B}{\Phi^*}\right)(x - N^{**}) + \frac{1}{l}B$
$N^{00} = F + \frac{\Phi}{g}$	N^*	$y = \frac{\beta}{n}(x - N^{00}) + B$	$y = \left(\frac{\beta}{gn^*} - \frac{B}{\Phi^*}\right)(x - N^*) + gB$

TAVOLA

DEGLI SVILUPPI DEL DETERMINANTE k

PEI CASI DI 2, 3, 4 SUPERFICIE DIVIDENTI.

$$\begin{vmatrix} u & -1 & 0 \\ 1 & t' & -1 \\ 0 & 1 & u' \end{vmatrix} = u\,t\,u' \begin{array}{l} +u' \\ +u \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} u & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u' & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t'' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u'' \end{vmatrix} = u\,t\,u'\,t''\,u'' \begin{array}{ll} +u'\,t'\,u'' & \\ & +u'' \\ +u\,t''\,u'' & \\ & +u' \\ +u\,t\,u'' & \\ & +u \\ +u\,t'\,u' & \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} u & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t' & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u' & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t'' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u'' & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t''' & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u''' \end{vmatrix} = u\,t'\,u'\,t''\,u''\,t'''\,u''' \begin{array}{lll} & +u''\,t'''\,u''' & \\ & +u'\,t''\,u''' & \\ +u'\,t'\,u''\,t'''\,u''' & +u'\,t''\,u''' & \\ +u\,t'\,u'\,t''\,u''' & +u'\,t'\,u'' & +u''' \\ +u\,t\,u''\,t'''\,u''' & +u\,t''\,u''' & +u'' \\ +u\,t\,u'\,t'''\,u'' & +u\,t'\,u''' & +u' \\ +u\,t\,u'\,t''\,u''' & +u\,t''\,u'' & +u \\ +u\,t\,u\,t''\,u'' & +u\,t'\,u''' & \\ & +u\,t'\,u'' & \\ & +u\,t'\,u' & \end{array}$$

INDICE DEL VOLUME.

PARTE PRIMA.

ALCUNI STRUMENTI TOPOGRAFICI A RIFLESSIONE.

Capitolo Primo.

ALCUNE PROPRIETÀ CHE S'ACCOMPAGNANO AGLI SPECCHI ED AI PRISMI.

Capitolo Secondo.

SQUADRO A SPECCHI; SQUADRI, ALLINEATORI, DIOTTRA E LIVELLO A PRISMA.

PARTE SECONDA.

LE PROPRIETÀ CARDINALI DEI CANNOCCHIALI ANCHE NON CENTRATI.

SEZIONE PRIMA.

NOTIZIE STORICHE ED ENUNCIAZIONE DELLE PRECIPUE PROPRIETA' CARDINALI.

Capitolo Primo.

NOTIZIE SUI LAVORI PUBBLICATI DAL 1840 AD OGGI.

Capitolo Secondo.

ENUNCIAZIONE DELLE PRECIPUE PROPRIETA' CARDINALI DI QUALUNQUE SISTEMA DIOTTRICO, ANCHE NON CENTRATO.

CAPITOLO TERZO.

ENUNCIAZIONE DELLE PROPRIETA' CARDINALI DEI SISTEMI TELESCOPICI.

CAPITOLO QUARTO.

ENUNCIAZIONE DELLE PROPRIETA' CARDINALI DEI TELESCOPI IN USO.

Pag.

SEZIONE SECONDA.

TEORIA ANALITICA DELLE PROPRIETA' CARDINALI.

Capitolo Primo.

DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI D'EMERGENZA IN FUNZIONE DI QUELLI D'INCIDENZA.

Capitolo Secondo.

STRUMENTI NON CENTRATI.

Capitolo Terzo.

CONTINUAZIONE DELLA TEORIA DEI SISTEMI CENTRATI.

Pag.



